

Gerber, Wilhelm H.K.

Disbui. Frankfurt a/Main

1989

**EIN MODELL ZUR BESCHREIBUNG DER
VISKOELASTISCHEN VERFORMUNG VON FESTKÖRPERN**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Wilhelm H.K. Gerber
aus Santiago de Chile

Gedruckt mit Genehmigung des
Fachbereichs Physik

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. H. Klein

Gutachter: Prof. Dr. H. Haug, Prof. Dr. R. Jelitto

Tag der mündlichen Prüfung: 27.4.1989

Danke!

Viele haben an der Verwirklichung dieser Arbeit mitgeholfen. Für die fachliche Unterstützung möchte ich vor allem Prof. Dr. Hartmut Haug und Dr. Kurt Weiss (Chief Scientist der Hilti AG und Zusatzgutachter) herzlichst danken. Mein Dank gehört auch den Professoren Dr. Rainer J. Jelitto (Frankfurt) und Dr. Klaus Dransfeld (Konstanz) für die Übernahme des Korreferats. Es sollen aber nicht die vielen Diskussionspartner wie Bernard Cavin, Max Stöck, Peter Meier und Dr. Walter Odoni vergessen werden.

Im besonderen gilt mein Dank der Firma Hilti AG, die es mir ermöglichte diese Doktorarbeit zu verfassen. Schliesslich gilt es den vielen Kollegen, die mit ihrer Hilfsbereitschaft auch indirekt zur Verwirklichung dieser Arbeit beigetragen haben. Für die persönliche Unterstützung möchte ich meiner Frau Evelyne sowie meinen Kindern Stefan und Monica danken.

INHALTSVERZEICHNIS

0. Zusammenfassung	0-1
1. Einleitung	1-1
2. Bestehende viskoelastoplastische Stoffgesetze	2-1
2.1. Rheologische Modelle	2-2
2.1.1. Grundmodelle	2-2
2.1.2. Viskoelastische Modelle	2-4
2.1.3. Elastoplastische Modelle	2-9
2.1.4. Viskoelastoplastische Modelle	2-13
2.2. Bestehende konstitutive Gleichungen	2-15
2.2.1. Verallgemeinerung der Grundmodelle	2-15
2.2.2. Viskoelastische Stoffgesetze	2-21
2.2.3. Elastoplastische Stoffgesetze	2-22
2.2.4. Viskoelastoplastische Stoffgesetze	2-25
3. Plastizität als Relaxation	3-1
3.1. Die Relaxation	3-2
3.2. Die Plastizitätsgleichung	3-16

4. Das Modell	4-1
4.1. Die konstitutiven Gleichungen	4-2
4.2. Die einfachen Grenzfälle	4-9
4.3. Das Schwingverhalten des Materials	4-12
5. Vergleich des Modells mit bekannten Materialeigenschaften	5-1
5.1. Der eindimensionale Fall	5-2
5.2. Spannungsrelaxation und Kriechen	5-6
5.3. Schalldämpfung	5-16
6. Folgerungen aus dem Modell	6-1
6.1. Die nichtlineare Strömungsgleichung	6-2
6.2. Das Bruchverhalten	6-7
7. Ein Beispiel einer technischen Anwendung	7-1
7.1. Das mechanische Modell des Spreizdübels	7-2
7.2. Modellparameter für Beton	7-7
7.3. Berechnung der Vorspannungsrelaxation	7-14
8. Ausblick	8-1
9. Literaturhinweise	9-1

0. Zusammenfassung

In den heutigen Ingenieurwissenschaften muss häufig das Verhalten von Werkstoffen unter hoher Beanspruchung berechnet werden. Hierbei steht die sichere Auslegung und die optimale Funktion der Bauteile im Vordergrund. So ist z.B. das Verhalten von Beton im Fall einer Befestigung von entscheidender Bedeutung. Ein "Kriechen" des Materials kann zu einer Verformung führen die die Befestigungsqualität einschränkt. Zur Berechnung des Materialverhaltens werden Stoffgesetze oder konstitutive Gleichungen verwendet, die die Verformung des Werkstoffes unter einer Last oder Lastgeschichte beschreiben. Solche Modelle, wie sie im Kapitel 2 zusammenfassend dargestellt werden, sind i.a. rein phänomenologisch und geben keinen Aufschluss über die im Festkörper ablaufenden Prozesse. Phänomenologische Modelle haben ausserdem den Nachteil, dass nur nach umfangreicher experimenteller Arbeit ein Modell ausgewählt und die Modellparameter bestimmt werden können. Das Langzeitverhalten des Werkstoffes kann folglich erst nach "langer Zeit" modelliert werden. Ein makroskopisches Stoffmodell, das auf den im Festkörper ablaufenden mikroskopischen Prozessen beruht, könnte bei einer solchen Modellierung und auch bei der Entwicklung neuer Werkstoffe von Nutzen sein. Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, ein solches Stoffmodell auf der Basis der Festkörperphysik zu formulieren.

In den Kapiteln 3 und 4 wird dieses Modell begründet und aufgestellt. Als erstes wird ausgehend von der Entropie eines verformten Körpers mittels der Onsager Relationen die plastische Verformung beschrieben. Der zugrunde gelegte Mechanismus entspricht einer Neuordnung der Atome, deren zeitlicher Ablauf durch eine Relaxationszeit bestimmt wird. Diese ist von den Verformungsmechanismen wie Versetzungswanderung, Rekristallisation, Erholungsprozesse und Leerstellenwanderung abhängig. Die Folge dieser Betrachtung ist eine Verallgemeinerung der klassischen Verzerrungsdefinition als Funktion des Verschiebungsfeldes wie es in der Kontinuumsmechanik eingeführt wird. Die so erhaltene "Plastizitätsgleichung" reduziert



sich im Fall einer kurzzeitigen Belastung, bei der eine vernachlässigbare Neuordnung der Atome stattfindet, zur klassischen Definition des Verzerrungstensors. Sowohl in diesem wie auch im allgemeinen Fall, der im Kapitel 4 behandelt wird, ist dann das System durch die Plastizitätsgleichung, die lineare elastische Spannungsdehnungsrelation, die Energieerhaltungsgleichung und die Newtonschen Gleichung vollständig beschrieben.

Für Prozesse, die in viel kürzeren Zeiten als die Relaxationszeit ablaufen, beschreibt dieses Gleichungssystem ein vollständig elastisches Verhalten des Festkörpers. Im gegenteiligen Fall wird das Verhalten durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben, wo die Viskosität proportional zur Relaxationszeit ist. Erste Vergleiche des Modells mit Messungen werden anhand von eindimensionalen Lösungen für Kriechen, Spannungsrelaxation und Schallwellendämpfung in Kapitel 5 diskutiert. Sowohl das berechnete Hochtemperatur- wie das Tieftemperaturkriechen ergeben das aus Messungen bekannte Materialverhalten. Die gerechnete Spannungsrelaxation zeigt als Funktion der Zeit den bei den meisten Materialien beobachteten logarithmischen Abfall. Die Schalldämpfung zeigt ebenfalls eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Messung und Theorie. Im Kapitel 6 werden Folgerungen des Modells sowohl für die Hydrodynamik wie für die Bruchmechanik beschrieben. Im Fall der Hydrodynamik zeigt die nichtlineare Strömungsgleichung eine Instabilität. Demnach ist z.B. bei einer Rohrströmung das Hagen-Poiseuille Strömungsprofil nur bis zu einer maximalen Geschwindigkeit stabil. Ob diese Instabilität mit dem Übergang laminar-turbulent in Beziehung steht ist noch unklar. Im Fall der Bruchmechanik stellt der Relaxationsprozess im Bereich einer Rissspitze eine Wärmequelle dar. Das Risswachsen wird durch ein lokales Aufschmelzen beschrieben. Erfolgt eine Aufschmelzung einer grösseren Zone um die Rissspitze, wird zusätzlich zum Bruch eine starke plastische Verformung eintreten (Duktilbruch). Bleibt dagegen die Schmelzzone im Bereich der Rissspitze, so erfolgt der Bruch mit einer minimalen plastischen Verformung (Spröbruch). Ob dieser Mechanismus die Rissfortpflanzung beschreibt soll in späteren Arbeiten untersucht werden.

Im Kapitel 7 folgt ein konkretes Beispiel einer technischen Anwendung des Modells. Wie als Beispiel zu Beginn dieser Zusammenfassung erwähnt, kann der Beton um eine Befestigung kriechen und dadurch die Befestigungsqualität beeinflussen. Mit Hilfe des Modells wird der Fluss und die Verfestigung des Betons in der Umgebung

der Spreizlappen eines Spreizdübels berechnet und der Vorspannungsabfall im Dübel berechnet. Ein Vergleich mit gemessenen Werten zeigt auch hier eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Diese positiven Ergebnisse einerseits und die sich aus dem Modell ergebenden neuen Ansätze und Problemstellungen andererseits (siehe Ausblick im Kapitel 8) lassen hoffen und erwarten, dass das hier vorgestellte Modell in Zukunft weitere Beiträge zur Modellierung von Werkstoffverhalten leisten kann.

1. Einleitung

Allgemein versteht man unter plastischer Verformung einen Vorgang, bei dem unter Anwendung einer Spannung die Form eines Körpers bleibend verändert wird. Flüssigkeiten sind in diesem Sinne auch unter geringen Spannungen plastisch verformbar. Bei einem Festkörper dagegen spricht man von einer Fließgrenze. Erst bei relativ hohen Spannungen ist das Material in der Lage zu "fliessen". Bei kleineren Spannungen erfolgt diese Verformung so langsam, dass man vom Kriechen redet. Der Unterschied zwischen "Fließen" in einer Flüssigkeit und "Kriechen" in einem Festkörper ist aber willkürlich. Er ist nur ein Produkt der gewählten "Zeitskala". In einem System, in dem "eine Sekunde eine Ewigkeit dauert", würde die Flüssigkeit nicht "fliessen" sondern "kriechen". Alles würde in "Zeitlupe" ablaufen. In einem System wo "Jahrmillionen nur Augenblicke wären", würden Festkörper "fliessen", wie wir es von Flüssigkeiten gewohnt sind. In dieser "Zeitskala" würde ein Gletscher gleich einem Bergbach ins Tal "fliessen". Gletscher, wie in Bild 1.1. dargestellt, wecken den Eindruck eines "erstarrten" Flusses. Das Beispiel stammt aus der Schweiz und stellt den Aletschgletscher dar (mit freundlicher Genehmigung von Werner Kaiser).



Bild 1.1: Der Aletschgletscher

Ähnlich verhält es sich mit der plastischen Verformung der Erdkruste. In Bild 1.2 ist ein Beispiel aus den Schweizer Alpen dargestellt. Es ist die Sichelchamm-Fulfirstgruppe in der Nähe von Walenstadt.



Bild 1.2: Die Sichelchamm-Fulfirstgruppe

Hätte man den Werdegang all der Verformungen mit "Zeitraffer" beobachten können, so wären ganze Berge vor unseren Augen gefaltet worden, als ob sie aus Knetmasse wären. Wie schnell diese Verformung vor sich geht, hängt von der aufgebrachten Spannung ab. Bei einem "langsamen" Fließen, wie das im geologischen Fall, spricht man von "Kriechen". Im Grenzfall vernachlässigbaren "Kriechens" zeigt das Material ein elastisches Verhalten und die Verformung ist reversibel. Dies entspricht dem Fall, dass unter der gegebenen Spannung, im beobachteten Zeitraum vernachlässigbar wenig mikroskopische Umformungsprozesse stattfinden. Für längere Zeiträume oder höhere Spannungen können die mikroskopischen Umformungsprozesse nicht mehr vernachlässigt werden, und das Material zeigt eine "plastische" und somit irreversible Verformung. Eine entscheidende Rolle spielt folglich die "Relaxationszeit" des mikroskopischen Umformungsprozesses. Für Verformungen in Zeiträumen viel kürzer als die Relaxationszeit verhält sich das Material elastisch, im gegenteiligen Fall plastisch. Viele dieser mikroskopischen Umformungsprozesse, wie z.B. Versetzungswan-

derung, Rekristallisation, Ausheilungsprozesse und Leerstellenwanderung sind bekannt. Entsprechend besteht die Möglichkeit aus der Festkörperphysik heraus diese materialspezifischen Relaxationszeiten abzuschätzen. Für die Beschreibung der makroskopischen plastischen Verformung werden meist phänomenologische Modelle angesetzt. Es sind nur vereinzelte Arbeiten bekannt (siehe Kapitel 5), die aus einem bestimmten mikroskopischen Mechanismus auf das makroskopische Verhalten schliessen. In der vorliegenden Arbeit soll ein Modell vorgestellt werden, das erlaubt, aus einer einfachen Verallgemeinerung der mikroskopischen Mechanismen das Verhalten unterschiedlicher Materialien in einer allgemeinen Form zu beschreiben.

2. Bestehende viskoelastoplastische Stoffgesetze

Es gibt viele Versuche das viskoelastoplastische Stoffverhalten mathematisch zu beschreiben. Den einfachsten Ansatz bilden die rheologischen Modelle. Vorteil dieser Modelle, die im Abschnitt 2.1 beschrieben sind, ist die mathematische Einfachheit. So lassen sich relativ leicht aus Versuchsergebnissen die entsprechenden Stoffgesetze konstruieren. Eine tiefere Einsicht in die Vorgänge im Festkörper erlaubt aber diese Methode nicht. Auch sind Extrapolationen der so aufgestellten Stoffgesetze auf das Langzeitverhalten ohne entsprechende Versuche kaum realistisch. Nachteil vieler dieser Modelle ist, dass sie nur eindimensionale Systeme beschreiben. Die Erweiterung auf mehrdimensionale Fälle wird im Abschnitt 2.2 dargestellt. Sie entspricht einem Ausbau der klassischen Kontinuumsmechanik und erlaubt ebenfalls keinen Einblick in die inneren Vorgänge im Festkörper. In beiden Fällen ist ein Anpassen der vielen Parameter des Modells an Versuchsergebnisse notwendig. Da die zugrunde gelegten Modelle meist von einem Stoff zu einem anderen unterschiedlich sind, ist es nicht möglich, einheitliche Materialkonstanten zu definieren. Die dem Versuch angepassten Parameter sind folglich nur für den jeweils betrachteten Fall gültig.

2.1. Rheologische Modelle

Die rheologischen Modelle sind phänomenologische Modelle. Sie werden z.B. von Krawietz in [2.1] sehr übersichtlich beschrieben. Jedes Volumenelement des Stoffes wird durch ein mechanisches Modell beschrieben. Dieses mechanische Modell besteht aus der Serie- und Parallelschaltung von drei mechanischen Grundelementen.

2.1.1. Grundmodelle

a) Hook-Modell

Das erste Grundelement ist die lineare Feder. Ein rheologisches Modell, dass nur aus einer Feder besteht wird ein Hooke-Modell genannt. In Bild 2.1.1 ist das Hooke-Modell dargestellt.

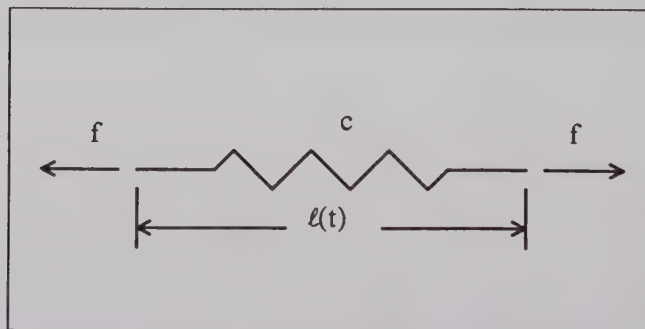


Bild 2.1.1: Das Hooke-Modell

Ist c die Federkonstante und l_0 die Länge der unverformten Feder, dann wird sie unter einer Kraft f eine Länge l annehmen, so dass

$$f = c (\ell - \ell_0). \quad (2.1.1)$$

b) Newton-Modell

Das zweite Grundelement ist der lineare Dämpfer der durch die Dämpfungskonstante η beschrieben wird. Besteht das rheologische Modell nur aus einem Dämpfer, so wird es Newton-Modell genannt. In Bild 2.1.2 ist das Newton-Modell dargestellt.

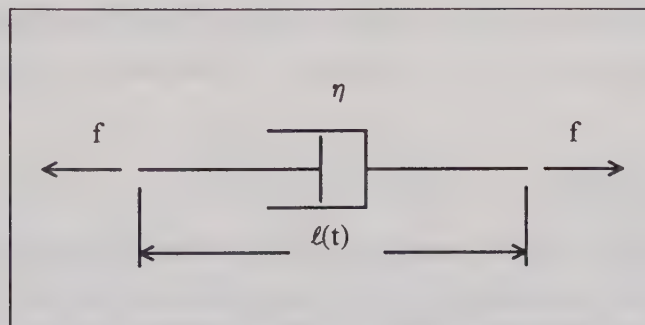


Bild 2.1.2: Das Newton-Modell

Unter einer konstanter Kraft f wird sich das Dämpfelement mit einer Geschwindigkeit $d\ell/dt$ bewegen, so dass

$$f = \eta \frac{d\ell}{dt}. \quad (2.1.2)$$

c) St.-Venant Modell

Das dritte Grundelement ist ein Reibelement. Besteht das rheologische Modell nur aus einem Trockenreibungselement dann spricht man von einem St.-Venant-Modell. In Bild 2.1.3 ist ein St.-Venant-Modell dargestellt.

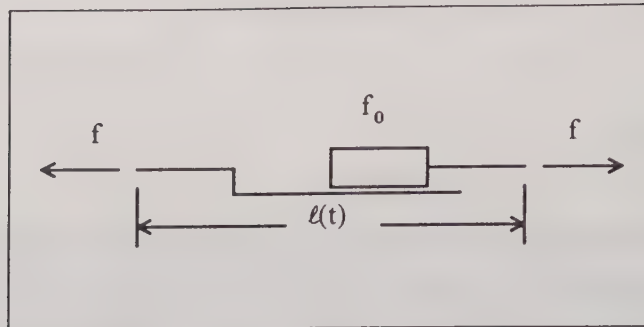


Bild 2.1.3: Das St.-Venant-Modell

Die Länge des Elementes wird sich nur ändern, wenn die angebrachte Kraft eine Haftkraft f_0 überschreitet. Haft- und Gleitkraft werden gleich angenommen, so dass

$$f = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\frac{d\ell}{dt}\right) f_0 & \text{falls } f > f_0 \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } f < f_0 \text{ ist} \end{cases} \quad (2.1.3)$$

ist.

2.1.2. Viskoelastische Modelle

a) Maxwell-Modell

Die rheologischen Modelle, die viskoelastisches Verhalten zeigen, müssen aus Federn (elastisches Verhalten) und Dämpfern (viskoses Verhalten) aufgebaut werden. Die zwei einfachsten Möglichkeiten bestehen in der seriellen bzw. parallelen Schaltung einer Feder und eines Dämpfers. Der erste Fall ist in Bild 2.1.4 dargestellt und wird Maxwell-Modell genannt.

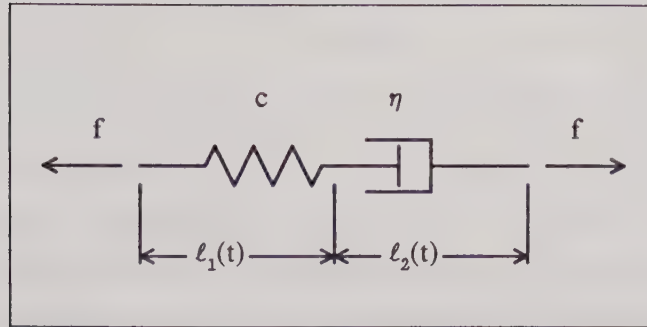


Bild 2.1.4: Das Maxwell-Modell

Durch Elimination der Teillängen ℓ_1 und ℓ_2 erhält man das Maxwellsche Stoffgesetz

$$\frac{df}{dt} + \frac{c}{\eta} f = c \frac{d\ell}{dt}, \quad (2.1.4)$$

wobei ℓ die Gesamtlänge, $d\ell/dt$ die Geschwindigkeit, c die Federkonstante und η die Dämpfungskonstante ist. Für den Fall, dass die Gesamtlänge als Funktion der Zeit gegeben ist (Wegkontrollierter Versuch), ergibt die Integration von (2.1.4)

$$f(t) = c \int_{-\infty}^t e^{-(c/\eta)(t-t')} \frac{d\ell}{dt'} dt'. \quad (2.1.5)$$

Der Faktor η/c entspricht einer Gedächtniszeit. Für Beobachtungszeiten t viel kürzer als die Gedächtniszeit η/c ist die Exponentialfunktion im Integrand annähernd eins. Führt man in dieser Annäherung die Integration aus, so erhält man die Beziehung (2.1.1). Kurzzeitig verhält sich so das Maxwell-Modell ideal elastisch. Für Beobachtungszeiten viel länger als die Gedächtniszeit klingt die Exponentialfunktion im Integrand so schnell ab, dass die Geschwindigkeit $d\ell/dt$ in dieser Zeit sich kaum ändert. Das Integral in (2.1.5) reduziert sich so zu einem Integral über die Exponentialfunktion. Führt man die Integration aus, so folgt, dass die Kraft durch (2.1.2) beschrieben wird. Das Langzeitverhalten des Maxwell-Modells entspricht folglich einem reinen Newton-Modell.

Das Verhalten des Maxwell-Modells kann durch zwei Versuche aufgezeigt werden. Im ersten wird die Probe mit einer konstanten Kraft f_0 über eine Zeit t_0 belastet. Da im Kurzzeitbereich die Probe elastisch reagiert, wird zu Beginn nur die Feder ihre Länge um f_0/c ändern, ohne dass das Dämpfelement zur Längenänderung beiträgt. Aus (2.1.4) wird aber ersichtlich, dass beim weiteren Fortschreiten der Zeit die Länge der Probe sich mit konstanter Geschwindigkeit f_0/η ändert. Diese Längenänderung erfolgt über dem Dämpfelement, die Verformung ist irreversibel. Wird nach einer Zeit t_0 die Probe entlastet, bleibt die Längenänderung $f_0 t_0/\eta$ erhalten. Man spricht von einem Kriechen der Probe. Der Versuch wird entsprechend Kriechversuch genannt. Die beschriebene Längenänderung ist in Bild 2.1.5 zusammengefasst.

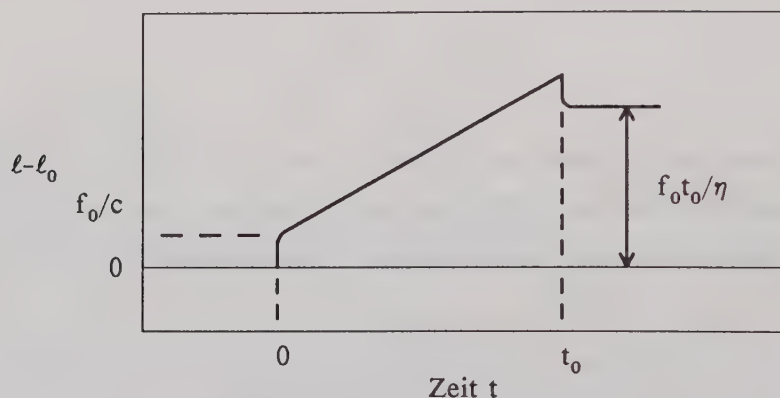


Bild 2.1.5: Kriechversuch an einem Maxwell-Modell

Im zweiten Versuch wird eine Längenänderung Δl über einer Zeit t_0 aufgebracht. Erneut reagiert das Modell zuerst elastisch. Die Feder wird durch die Längenänderung Δl eine Kraft $c\Delta l$ aufbringen. Mit der Zeit wird aber der Dämpfer reagieren, seine Länge ändern und dabei die Feder entlasten. Nach (2.1.4) geschieht dies in Form eines exponentiellen Abfalls. Nach einer Zeit t_0 ist die Kraft auf einen Wert $c\Delta l e^{-(c/\eta)t_0}$ relaxiert. Der Versuch wird entsprechend Relaxationsversuch genannt. Auch in diesem Fall bleibt nach Entlastung eine permanente Längenänderung der Größe $\Delta l e^{-(c/\eta)t_0}$ erhalten. In Bild 2.1.6 ist die Relaxation der Kraft graphisch dargestellt.

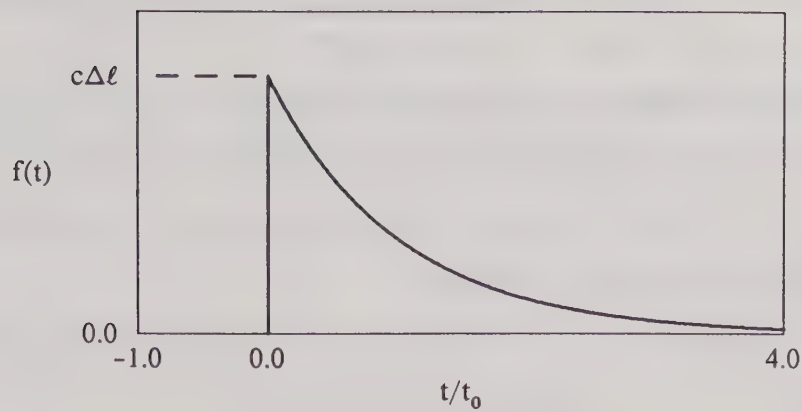


Bild 2.1.6: Relaxationsversuch an einem Maxwell-Modell

b) Kelvin-Modell

Ein weiteres, einfaches viskoelastisches Modell ist das Kelvin-Modell. Es besteht aus einer Feder mit Federkonstante c und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante η , die parallel geschaltet wurden. In Bild 2.1.7 ist diese Schaltungsart dargestellt.

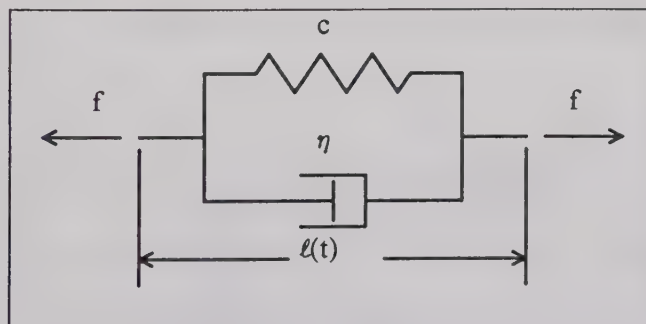


Bild 2.1.7: Das Kelvin-Modell

Aus den Gleichungen für das Hook-Modell und das Newton-Modell kann leicht die Beziehung zwischen Kraft f und Gesamtlänge ℓ

$$f = c(\ell - \ell_0) + \eta \frac{d\ell}{dt} \quad (2.1.6)$$

hergeleitet werden. Durch die Parallelschaltung kann die Feder nur beansprucht werden, wenn beim Dämpfer die Länge geändert wird. Dies verursacht, dass für kurze Beobachtungszeiten im Vergleich zur Gedächtniszeit η/c das Material sich nicht elastisch sondern viskos verhält. Erst im Langzeitverhalten kommt die Elastizität der Feder zum Tragen. Entsprechend ist das Verhalten in einem Kriechversuch grundsätzlich verschieden. Bei einer konstanten Belastung f_0 ist die Lösung der Differentialgleichung für die Länge ℓ durch

$$\ell(t) = \ell_0 - \frac{f_0}{c} (1 - e^{-(c/\eta)t}) \quad (2.1.7)$$

gegeben. Bei einer Entlastung zu einer Zeit t_0 wird die Feder das Dämpfelement erneut auf die Ursprungslänge ℓ_0 führen. Diese Kriecherholung kann ebenfalls mit (2.1.7) erhalten werden. Aus der Integration für $f = 0$ und der Anfangsbedingung $\ell(t_0)$ folgt so

$$\ell(t) = \ell_0 + (\ell(t_0) - \ell_0) e^{-(c/\eta)(t-t_0)} \quad \text{für } t > t_0. \quad (2.1.8)$$

In Bild 2.1.8 ist dieses Kriechverhalten graphisch dargestellt.

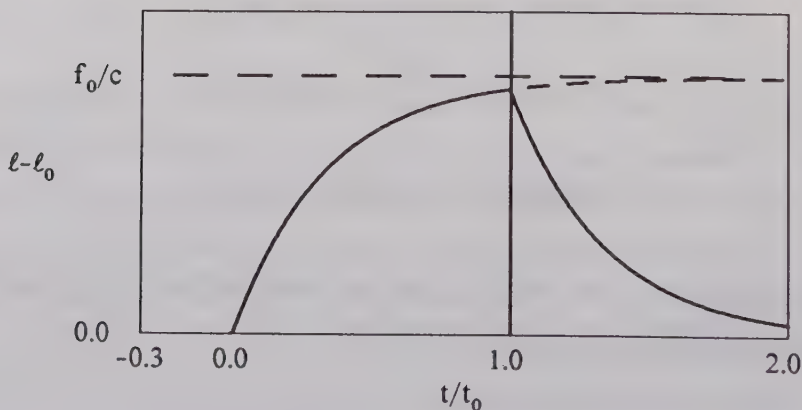


Bild 2.1.8: Kriechversuch des Kelvin-Modells

Das Kelvin-Modell hat keine Möglichkeit zu relaxieren.

Um weitere viskoelastische Modelle zu erhalten können beliebige Kombinationen von Maxwell- und Kelvin-Modellen parallel und seriell geschaltet werden.

2.1.3. Elastoplastische Modelle

a) Prandtl-Modell

Die rheologischen Modelle, die elastoplastisches Verhalten zeigen, müssen aus Federn (elastisches Verhalten) und Reibelementen (plastisches Verhalten) aufgebaut werden. Die einfachsten Möglichkeiten bestehen in der seriellen Schaltung einer Feder und eines Reibelementes. Dieses Modell ist unter dem Namen Prandtl-Modell bekannt und in Bild 2.1.9 dargestellt.

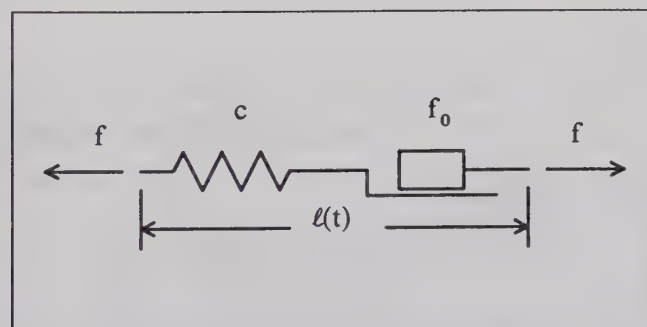


Bild 2.1.9: Das Prandtl-Modell

Ein Prandtl-Modell zeigt keine Relaxation oder Kriechen. Bei einer Belastung wird die Kraft solange von der Feder aufgenommen, bis die Haftkraft des Reibelementes überschritten wird. Eine höhere Belastung ist nicht möglich. Das Reibelement gleitet und wird beim Entlasten seine letzte Position beibehalten. Das Gleiten wird als plastisches Fließen bezeichnet. Das beschriebene Verhalten ist in Bild 2.1.10 dargestellt.

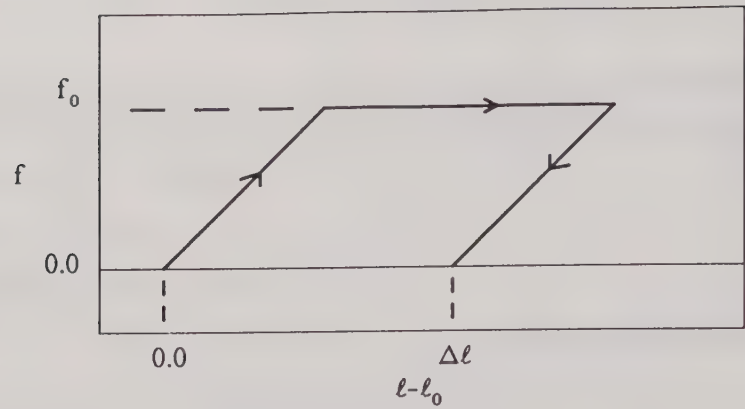


Bild 2.1.10: Verhalten des Prandtl-Modell

b) Zwei parallel geschaltete Prandtl-Modelle

Ein etwas komplexeres Modell ist die Parallelschaltung zweier Prandtl-Modelle wie Bild 2.1.11 zeigt

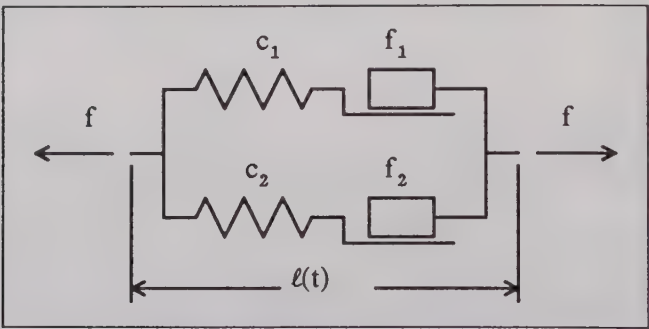


Bild 2.1.11: Parallelschaltung von zwei Prandtl-Modellen

Wie sich dieses Modell verhält, ist im Kraft-Weg-Diagramm in Bild 2.1.12 dargestellt.

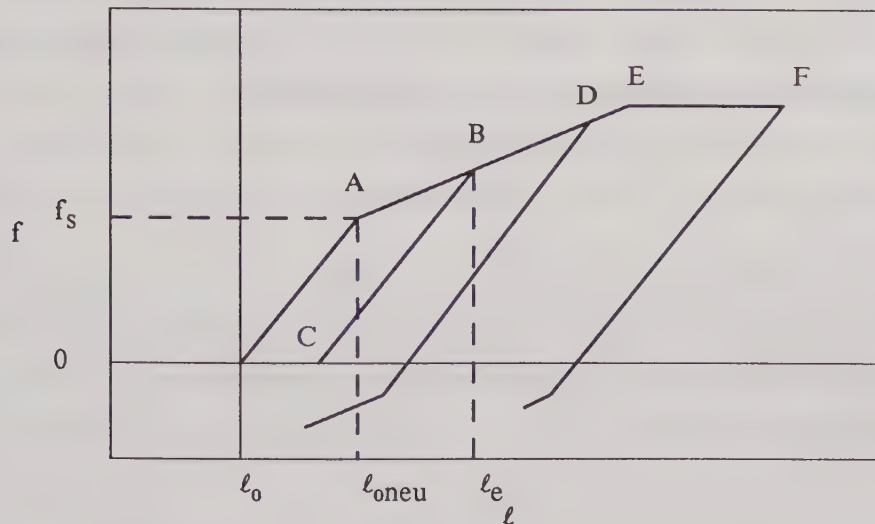


Bild 2.1.12: Verhalten von zwei parallel geschalteten Prandtl-Modelle

Bei Kräften kleiner als die Haftkräfte f_1 und f_2 , sind beide Reibelemente in Ruhe. Das Modell reagiert elastisch, mit einer Federkonstante $c_1 + c_2$. Die Kraft ist folglich

$$f = (c_1 + c_2) (\ell - \ell_0) \quad (2.1.9)$$

wobei ℓ_0 die Länge des nicht belasteten Modells ist. Ist f_1 kleiner als f_2 , dann wird bei weiterem Belasten das erste Haftelement bei

$$f_s = f_1 \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \quad (2.1.10)$$

ins Gleiten kommen (Punkt A in Bild 2.1.12). Die Länge des Modells ist zu diesem Zeitpunkt

$$\ell_s = \ell_0 + \frac{f_s}{c_1} \quad (2.1.11)$$

Die zusätzliche Belastung wird nur noch von der zweiten Feder übernommen. Die

Federkonstante ist demnach c_2 und folglich kleiner als im Bereich $f < f_S$. Das Modell lässt sich nun leichter strecken oder stauchen. Im ersten Fall redet man von einer Streckgrenze. Bei weiterem Verformen ist die Kraft

$$f = f_S + c_2(\ell - \ell_S) . \quad (2.1.12)$$

Sobald das Modell entlastet wird (Punkt B), haftet das erste Reibelement. Die Gleichgewichtslänge der ersten Feder hat sich aber mit dem Gleiten des Reibelementes geändert. Ist die Länge, bei der die Entlastung eingeleitet wird, ℓ_e , dann ist die Gleichgewichtslänge der ersten Feder

$$\ell_g = \ell_e - \frac{f_S}{c_1} . \quad (2.1.13)$$

Die Entlastung sowie die erneute Belastung erfolgen mit einer Federkonstante $c_1 + c_2$. Die Kraft-Weg Beziehung ist

$$f = f_S + c_1(\ell - \ell_g) + c_2(\ell - \ell_0) \quad (2.1.14)$$

und zeigt, dass eine plastische Verformung eingetreten ist. Im Falle ℓ gleich ℓ_0 ist f nicht mehr Null. Die neue Länge des Modells lässt sich aus Gleichung (2.1.13) berechnen. Bei f gleich Null folgt so die Länge

$$\ell_{0\text{neu}} = \frac{c_1\ell_e + c_2\ell_0 - f_S}{c_1 + c_2} . \quad (2.1.15)$$

Bei Erreichen dieses neuen Gleichgewichtszustand (Punkt C) befinden sich beide Federn unter entgegengesetzten Spannungen. Eine neue Belastung wird erst bei einer Länge ℓ_e erneut die weichere Federcharakteristik erreichen. Dies entspricht bei einem Zugversuch einer Erhöhung der Streckgrenze. Man spricht von einer Verfestigung. Im Fall eines Druckversuches kann man von einer Stauchgrenze sprechen. Die Tatsache, dass im Gleichgewichtszustand beide Federn unter Spannung sind, bedeu-

tet, dass die Erhöhung der Streckgrenze eine Reduktion der Stauchgrenze (und umgekehrt) bewirkt (Punkt D).

Bei weiterem Belasten erreicht man bei f gleich f_2 den Fall, wo beide Reibelemente gleiten (Punkt E). Bei einer neuen Entlastung verläuft der Prozess wie bei Punkt B bis C wobei durch das Gleiten zwischen Punkt E und F ein Versatz in der Länge entsteht.

2.1.4. Viskoelastoplastische Modelle

Die meisten Materialien zeigen nicht ein reines viskoelastisches bzw. elastoplastisches Verhalten. Es ist notwendig, eine Serien- und Parallelschaltung aller Grundmodelle zu erstellen. Ein Beispiel ist in Bild 2.1.13 dargestellt.

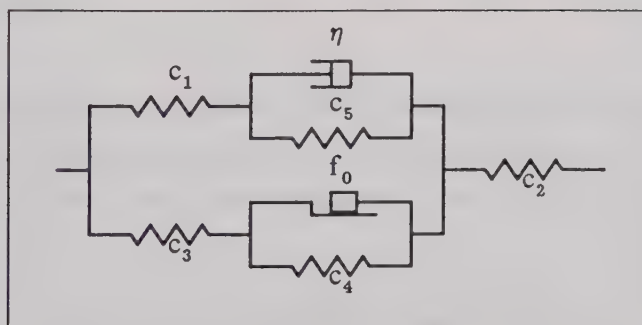


Bild 2.1.13: Ein viskoelastoplastisches Modell

Es ist nicht sinnvoll, dieses Modell im einzelnen zu diskutieren. Es soll hier nur aufgezeigt werden, wie man aus rheologischen Grundmodellen "fast jedes" Verhalten des Materials beschreiben kann. Eine Verallgemeinerung der Grundmodelle erlaubt auch komplexeres Verhalten zu beschreiben. So kann das Hookesche Modell durch eine nichtlineare Feder,

$$f = c_1(\ell - \ell_0) + \frac{c_2}{2} (\ell - \ell_0)^2 + \dots \quad (2.1.16)$$

das Newton-Modell durch ein nichtlineares Dämpfelement

$$f = \eta_1 \frac{d\ell}{dt} + \frac{\eta_2}{2} \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 + \dots \quad (2.1.17)$$

und das St. Vénant-Modell durch ein Reibelement mit allgemeiner Haftkraft

$$f_0 = f_0 \left(\ell - \ell_0, \frac{d\ell}{dt} \right) \quad (2.1.18)$$

ersetzt werden. Alle diese Grundmodelle und deren Zusammenschaltungen sind ein-dimensional. Um ein Kontinuum zu beschreiben, müssen die Modelle für ein dreidimensionales Volumenelement verallgemeinert werden.

2.2. Bestehende konstitutive Gleichungen

Im Abschnitt 2.1. wurden die wesentlichen Merkmale des Verhaltens eines Festkörpers unter einer Belastung für den eindimensionalen Fall modelliert. Für die meisten praktischen Anwendungen ist aber eine Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall unumgänglich. Eine Verallgemeinerung wird notwendig.

2.2.1. Verallgemeinerung der Grundmodelle

a) Elastisches-Modell

Eine solche Verallgemeinerung ist für das Hooke-Modell, wie im Abschnitt 2.1.1. beschrieben, Kern der linearen elastischen Kontinuumsmechanik. In diesem Fall wird die Dehnung $\ell(t) - \ell_0$ durch den Verzerrungstensor (siehe z.B. [2.13])

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.2.1)$$

dargestellt. Der Vektor $\vec{u}(\vec{x}, t)$ beschreibt die Verschiebung zur Zeit t eines Punktes im Festkörper, der vor der Verformung sich am Ort $\vec{x}$ befand. Für ein isotropes Material ist der Spannungstensor (unter Benützung der Einsteinschen Summenkonvention) durch

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.2.2)$$

gegeben. G ist der Schubmodul und ν die Poissonsche Querkontraktionszahl. Gleichung (2.2.2) entspricht dem linearen Hooke-Modell wie (2.1.1) es beschreibt. Führt man den Deviatorspannungstensor

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (2.2.3)$$

mit der Oktaedernormalspannung

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (2.2.4)$$

und den Deviatorverzerrungstensor

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \epsilon_0 \delta_{ij} \quad (2.2.5)$$

mit der Oktaedernormalverzerrung

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \epsilon_{ii} \quad (2.2.6)$$

ein, dann lautet (2.2.2)

$$s_{ij} = 2G e_{ij} \quad (2.2.7)$$

und

$$\sigma_0 = 3 \frac{\epsilon_0}{\kappa}. \quad (2.2.8)$$

Die Grösse κ ist die Kompressibilität des Materials und lässt sich aus

$$\kappa = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)G} \quad (2.2.9)$$

berechnen. Die Oktaedernormalspannung und die Oktaedernormalverzerrung sind

skalare Grössen und folglich invariant gegen einer Rotation des Koordinatensystems. Üblicherweise bezeichnet man die Invarianten

$$I_1' = \sigma_{ii} = 3 \sigma_0 \quad (2.2.10)$$

und

$$I_1 = \epsilon_{ii} = 3 \epsilon_0 \quad (2.2.11)$$

als die ersten Invarianten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors. Weitere Invarianten können mit Hilfe der Kontraktion zweier Tensoren erhalten werden. So werden

$$I_2' = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii}^2) \quad (2.2.12)$$

und

$$I_2 = \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - \epsilon_{ii}^2) \quad (2.2.13)$$

als die zweiten Invarianten des Spannungs- bzw. Verzerrungstensors definiert. Analog werden Invarianten aus dem Deviatorspannungs- und Deviatorverzerrungstensor gebildet. In diesem Fall ist aber die Kontraktion $s_{ij} \delta_{ij}$ gleich Null, so dass die zweite Invariante des Deviatorspannungstensors gleich

$$J_2' = - \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{3} I_1'^2 - I_2' \quad (2.2.14)$$

und die zweite Invariante des Deviatorverzerrungstensors gleich

$$J_2 = - \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \quad (2.2.15)$$

ist. Die Invariante, die aus der Kontraktion eines Spannungs- und eines Verzerrungstensors entsteht,

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (s_{ij} e_{ij} + 3 \sigma_0 \epsilon_0) \quad (2.2.16)$$

entspricht der durch die Verformung gespeicherten Energiedichte. Mit Hilfe von (2.2.7) und (2.2.8) lautet die Energiedichte

$$U = G e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2\kappa} (3\epsilon_0)^2 = 2G J_2 + \frac{1}{2\kappa} I_1^2 \quad (2.2.17)$$

Demnach ist das Hooksche Modell eine lineare Kombination des Quadrats der Oktaedernormalverzerrung und der zweiten Deviatorverzerrungsinvarianten.

Allgemein kann aber die Energiedichte als eine beliebige Funktion der Oktaedernormalverzerrung und aus einer beliebiger Anzahl kontrahierter Deviatorverzerrungstensoren dargestellt werden. Der Spannungstensor lässt sich dann aus

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_{ij}} U(I_1, I_2) \quad (2.2.18)$$

berechnen. Da aber gemäss (2.2.18) die Belastung und die Entlastung auf den selben Weg erfolgt (keine Hysterese), wird in diesen Modellen keine Energie dissipiert. Auch wenn (2.2.18) im anisotropen Fall zu

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.2.19)$$

verallgemeinert wird, bleibt das Verhalten des Materials "elastisch". Eine permanente Formänderung oder eine Energiedissipation ist nicht möglich.

b) Viskositäts-Modell

Als nächstes kann man das Newton-Modell verallgemeinern. Landau und Lifschitz zeigen in [2.13] wie sich solch ein Ansatz in einfacher Form verwirklichen lässt. In diesem Fall wählt man einen Ansatz für die Dissipationsleistungsdichte analog zu Verzerrungsenergiedichte (2.2.17). In diesem Fall werden aber die Verzerrungen durch ihre Ableitungen ersetzt. So folgt

$$\psi = \eta \left(\frac{de_{ij}}{dt} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} \left(\frac{d\epsilon_0}{dt} \right)^2 \quad (2.2.20)$$

wo in Analogie zur Dissipation in einer Flüssigkeit η die Rolle der Scherviskosität und ζ die der Volumenviskosität spielt. Die Spannung lässt sich analog zu (2.2.18) durch

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi \left(\dot{\epsilon}_{ij} \right)}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} \quad (2.2.21)$$

berechnen. Daraus folgt

$$\sigma_{ij} = 2\eta \frac{de_{ij}}{dt} + \zeta \frac{de_{kk}}{dt} \delta_{ij} . \quad (2.2.22)$$

Diese Gleichung entspricht dem eindimensionalen Newton-Modell (2.1.2). Auch hier ist eine Verallgemeinerung wie bei der Energiedichte für nichtlineare Dissipationsfunktionen möglich.

c) Plastizitäts-Modell

Das dritte Grundmodell im Abschnitt 2.1 war das St.-Venant Modell. Das Modell wird durch (2.1.3) in einer einfachen Form beschrieben. Es besteht grundsätzlich aus einer Haftkraft als Grenzwert. Im dreidimensionalen Fall muss dieser Grenzwert durch eine Grenzfläche im sechsdimensionalen Spannungsraum σ_{ij} dargestellt werden. Da die Grenzfläche von einer Rotation des Koordinatensystems unabhängig sein muss, kann die Funktion nur von den Spannungstensorinvarianten abhängen. Betrachtet man keine Kontraktionen von mehr als zwei Spannungstensoren, muss die allgemeine Form der Grenzfläche

$$F(\sigma_0, J_2') = 0 \quad (2.2.23)$$

sein. Experimentell zeigt sich, dass für Metalle die Grenzfläche nicht vom hydrostatischen Druck bzw. von der Oktaedernormalspannung abhängt. Bei porösen Materialien tritt auch bei isostatischem Druck eine plastische Verformung ein. In diesem Fall ist die Funktion nur von der zweiten Invarianten des Deviatorspannungstensors abhängig. Ist im eindimensionalen Fall die Fließspannung, d.h. die Spannung, bei der die plastische Verformung eintritt, $\bar{\sigma}$, dann ist der Schwellenwert aus (2.2.3) und (2.2.14) für die zweite Invariante gleich

$$J_2' = \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2. \quad (2.2.24)$$

In der linearen Näherung ist dann die Grenzfläche durch

$$F(\sigma_{ij}) = J_2' - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = I_2' - \frac{1}{3} I_1'^2 - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad (2.2.25)$$

beschrieben. Dieser Ansatz für die Grenzfläche wird als Fließkriterium von von Mises bezeichnet. Falls das Material auch unter einem hydrostatischen Druck plastisch verformbar ist, muss die Funktion auch von der Oktaedernormalspannung abhängen. Ein Beispiel von solch einer Grenzfläche ist das von Drucker und Prager entwickelte Mohr-Coulomb Fließkriterium [2.9]. Das lineare Mohr-Coulomb Fließkriterium hat die Form

$$F(\sigma_{ij}) = \alpha I_1' + (J_2')^{1/2} - \frac{1}{3} \bar{\sigma} = 0, \quad (2.2.26)$$

wo α eine Konstante ist. Vor allem Beton, Erdreich und andere poröse Materialien zeigen auch unter isostatischer Belastung plastisches Verformen. Die hohe Porosität erlaubt das Material "plastisch" zu verdichten.

Es bestehen eine Vielzahl solcher Fließkriterien. Eine weitere Möglichkeit, die solche Grenzflächenmodelle haben, ist die Änderung der Grenzfläche durch die Belastung

der Probe. So kann bei einer zweiten Belastung die Fließspannung grösser oder kleiner als bei der ersten Belastung sein. Man spricht von Ver- oder Entfestigung. Dies wird modelliert, indem die Grenzfläche abhängig von der Belastung verschoben (kinematische Verfestigung) oder vergrössert (isotrope Verfestigung) wird. Die Beschreibungen dieser Möglichkeiten sprengen den Rahmen dieses Überblicks. Weitere Einzelheiten können aus [2.1]–[2.6] entnommen werden.

2.2.2. Viskoelastische Stoffgesetze

Im Abschnitt 2.1.2. sind zwei einfache Modelle vorgestellt worden, um das eindimensionale viskoelastische Verhalten des Materials zu beschreiben. Das Maxwell-Modell wurde durch das Stoffgesetz (2.1.5) beschrieben. Das Kelvin-Modell durch (2.1.6). Beide Gleichungen können in der Form

$$f(t) = f(0) + \int_0^t dt' G(t-t') \frac{d}{dt'} \ell(t') \quad (2.2.27)$$

mit

$$G(t) = c e^{-(c/\eta)t} \quad \text{und} \quad f(0) = 0 \quad (2.2.28)$$

für das Maxwell-Modell und

$$G(t) = c + \eta \delta(t) \quad \text{und} \quad f(0) = c(\ell(0) - \ell_0) \quad (2.2.29)$$

für das Kelvin-Modell dargestellt werden. $\delta(t)$ ist die Dirac Deltafunktion. Analog zu (2.2.27) ist eine Verallgemeinerung in der Form

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(0) \epsilon_{kl}(0) + \int_0^t dt' G_{ijkl}(t-t') \frac{d}{dt'} \epsilon_{kl}(t') \quad (2.2.30)$$

naheliegend. Im Fall eines isotropen Materials besteht G_{ijkl} nur aus zwei unabhängigen Funktionen $G_1(t)$ und $G_2(t)$. Eine mögliche Darstellung ist

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3} (G_2(t) - G_1(t)) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} G_1(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (2.2.31)$$

In dieser Darstellung reduziert sich (2.2.30) zu

$$s_{ij}(t) = G_1(0) e_{ij}(0) + \int_0^t dt' G_1(t-t') \frac{d}{dt'} e_{ij}(t') \quad (2.2.32)$$

und

$$\sigma_0(t) = G_2(0) \epsilon_0(0) + \int_0^t dt' G_2(t-t') \frac{d}{dt'} \epsilon_0(t') \quad (2.2.33)$$

$G_1(t)$ bzw. $G_2(t)$ spielen die Rolle einer Gedächtnisfunktion. Ihre Form ist nicht berechenbar sondern wird durch Versuche bestimmt. Da das Material mit der Zeit "vergisst", wird meist der Ansatz

$$G_i(t) = G_{i_0} + \sum_{n=1}^N G_{i_n} e^{-t/\tau_n} \quad (2.2.34)$$

angenommen. Die Zeiten τ_n entsprechen Relaxationszeiten und G_{i_n} ermöglichen eine Gewichtung.

2.2.3. Elastoplastische Stoffgesetze

In Abschnitt 2.2.1. wurde des Fliesskriterium mittels einer Grenzfläche eingeführt.

Im eindimensionalen Fall, wie es das Prandtl-Modell in Abschnitt 2.1.3. beschreibt, kann das Material nur in einer Richtung plastisch fließen. Im dreidimensionalen Fall dagegen stellt sich die Frage, wie das plastische Fließen geschieht. Der elastische Anteil der Verzerrung ϵ_{ij}^e kann aus der Spannung σ_{ij} über das Hookesche Spannungs-Verzerrungsrelation (2.2.2) berechnet werden. Für die Änderung des plastischen Anteils $d\epsilon_{ij}^p$ muss eine Relation aufgestellt werden. Ein mögliches Modell ist das Lévy-v. Mises Modell. In ihm wird als Grenzfläche die v. Mises Grenzfläche angenommen. Bei Erreichen der Grenzfläche wird das weitere Verformen durch die Beziehung

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda s_{ij} \quad (2.2.35)$$

beschrieben. $d\lambda$ ist ein Mass für das plastische Fließen. Es wird im allgemeinen eine Funktion der Invarianten des Spannungstensors sein. Aus einer Energiebetrachtung folgt in diesem Modell, dass

$$d\lambda = \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} s_{ij} de_{ij}^p \quad (2.2.36)$$

ist. $\bar{\sigma}$ ist die eindimensionale Fließspannung. Ein weiteres Modell ist das Prandtl-Reuss Modell. Auch hier wird als Grenzfläche die v. Mises Grenzfläche (2.2.25) angenommen. Die Bedingung (2.2.35) lautet in diesem Fall

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda s_{ij} \quad (2.2.37)$$

mit

$$d\lambda = \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} s_{ij} de_{ij} . \quad (2.2.38)$$

Eine allgemeinere Überlegung von Drucker (in [2.9] Abschnitt 3.2.) leitet das plastische Fließen von der Definition der Grenzfläche selbst ab. Die Änderung des plastischen Anteils der Verzerrung $d\epsilon_{ij}^p$ muss nach dieser Stabilitätsbetrachtung senkrecht zur Grenzfläche im Spannungsraum σ_{ij} sein. Da die Flächennormale zur

Grenzfläche gleich

$$n_{\sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2.39)$$

ist, muss

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2.40)$$

sein. Gleichung (2.2.40) wird als Fließregel bezeichnet. Setzt man für die Grenzfläche die v. Mises Grenzfläche (2.2.25) ein, so folgt aus (2.2.40) mit (2.2.25) für die Fließregel (2.2.37). Das Prandtl-Reuss Modell erfüllt so die Drucker Stabilitätsbedingung, das Lévy-v. Mises Modell dagegen nicht. Die Stabilitätsbedingung gilt aber nicht für sich verfestigende Materialien. Der Faktor $d\lambda$ kann aber direkt aus der Grenzfläche F bestimmt werden. Hierfür muss betrachtet werden, dass während einer plastischen Verformung die Änderung der Spannung $d\sigma_{ij}$ nur auf der Grenzfläche stattfinden kann. In anderen Worten muss $d\sigma_{ij}$ senkrecht zur Flächennormale $n_{\sigma_{ij}}$ sein. Nach (2.2.39) folgt

$$n_{\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = dF = 0 . \quad (2.2.41)$$

Die gesamte inkrementelle Änderung der Verzerrung $d\epsilon_{ij}$ besteht aus der Änderung der elastischen Verzerrung $d\epsilon_{ij}^e$ und plastischen Verzerrung $d\epsilon_{ij}^p$. Die inkrementelle Spannungsverzerrungsrelation

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\epsilon_{kl}^e \quad (2.2.42)$$

lautet entsprechend mit (2.2.40)

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) = E_{ijkl} \left(d\epsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) , \quad (2.2.43)$$

wobei E_{ijkl} ein materialspezifischer Tensor ist. Multipliziert man (2.2.43) mit $\partial F / \partial \sigma_{ij}$ und führt die Summe über i und j aus, dann folgt mit (2.2.41), dass

$$d\lambda = \frac{E_{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{kl}}{E_{pqrs} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}}} . \quad (2.2.44)$$

Aus (2.2.40) folgt der Ausdruck für die Fliessregel

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{E_{klmn} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\epsilon_{nm}}{E_{pqrs} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (2.2.45)$$

In dieser Form ist für eine beliebige Grenzfläche F das Materialverhalten vollständig beschrieben.

2.2.4. Viskoelastoplastische Stoffgesetze

Die viskoelastoplastischen Modelle sind eine Mischung aus den bisher gezeigten viskoelastischen und elastoplastischen Modelle. Das elastoplastische Modell zeigte einen elastischen und einen plastischen Bereich. Der rein elastische Bereich muss nun durch einen viskoelastischen Bereich ersetzt werden. Dieser kann wie im Abschnitt 2.2.2. beschrieben werden. Durch das viskoelastische Verhalten kann sich aber die Grenzfläche ändern. Der Übergang in den plastischen Bereich wird folglich von der Vorgeschichte der Verformung des Materials im viskoelastischen Bereich abhängen. Da aber die Fliessregel ebenfalls von der Grenzfläche abhängt, wird das plastische Fließen ebenfalls von der Vorgeschichte der Verformung im viskoelastischen Bereich abhängen. Für eine gegebene Grenzfläche kann aber das plastische Fließen wie im

Abschnitt 2.2.3. beschrieben werden. Folglich ist das Kernproblem des viskoelastoplastischen Stoffverhaltens die Beschreibung, wie sich die Grenzfläche mit der Verformung im viskoelastischen Bereich verändert. Die einfachste Lösung ist die Verallgemeinerung der Grenzfläche, in dem die eindimensionale Fließspannung $\bar{\sigma}$ verallgemeinert wird. Im elastoplastischen Modell ist die Fließspannung konstant. In diesem Fall aber kann sie eine Funktion der Invarianten des Spannungstensors oder dessen zeitlichen Ableitungen oder Integrationen sein. In dieser Form lässt sich das viskoelastoplastische Stoffverhalten vollständig beschreiben.

3. Plastizität als Relaxation

Die plastische Verformung eines Körpers ist ein irreversibler Prozess. Thermodynamisch gesehen muss der Zustand, in dem sich der Körper während des Prozesses befindet, ein Nichtgleichgewichtszustand sein. Die Entropie des elastisch verformten Körpers muss also kleiner als die des plastisch verformten Körpers sein. Der Übergang in den Gleichgewichtszustand erfolgt aber nicht augenblicklich, sondern benötigt eine "Relaxationszeit". Physikalisch wird diese Relaxationszeit durch den Relaxationsmechanismus bestimmt. Der Relaxationsmechanismus ist der Prozess im Material, der es erlaubt, den Gleichgewichtszustand zu erreichen. Im ersten Abschnitt 3.1. wird die zeitliche Änderung der Verzerrung in einem abgeschlossenen System betrachtet und die allgemeine Kinetik des Relaxationsmechanismus beschrieben. Im zweiten Abschnitt 3.2. werden die Gleichungen auf den Fall eines nicht abgeschlossenen Systems ausgedehnt.

3.1. Die Relaxation

In der klassischen Kontinuumsmechanik wird die Verzerrung durch das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$ definiert. Die makroskopischen Spannungen sind aber eine Folge der interatomaren Verzerrungen, d.h. der Verzerrung der interatomaren Abstände. Nur im Fall, dass das Festkörperlattice stets dieselbe Struktur beibehält, kann die aus der Verschiebung berechnete Verzerrung mit der mittleren atomaren Verzerrung übereinstimmen. Finden Rekristallisation, Leerstellenwanderung oder durch Versetzungswanderungen hervorgerufene Gleitprozesse statt wird das Gitter modifiziert und folglich die interatomare Verzerrung verändert. Dies kann auch dann geschehen, wenn das makroskopische Verschiebungsfeld zeitlich konstant bleibt. In den Bildern 3.1.1a bis 3.1.1d ist eine solche, stark vereinfachte innere Umwandlung dargestellt. Im Bild 3.1.1a wird der Festkörper verformt. Mikro- wie Makroverzerrung sind identisch.

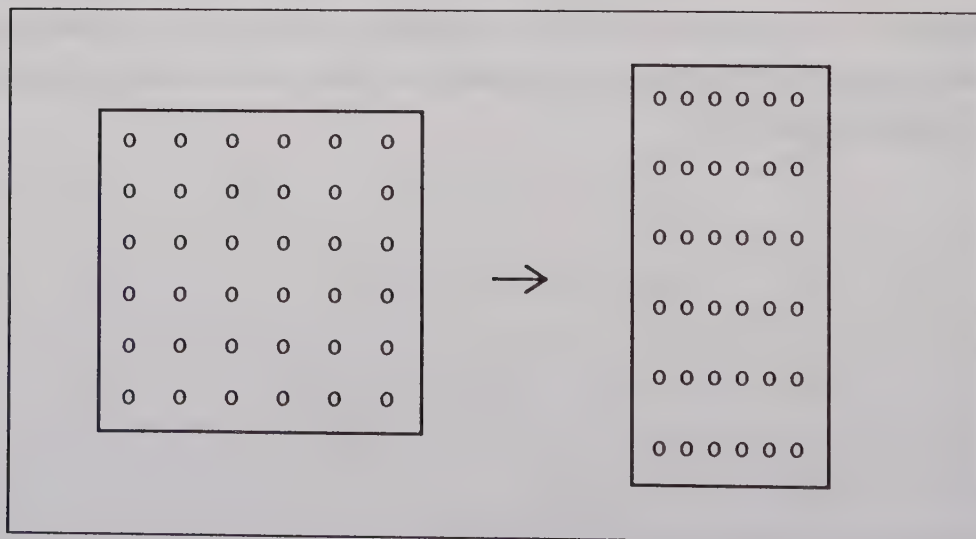


Bild 3.1.1a: Verformung eines Idealgitters

Wie im Verlauf dieses Abschnitts gezeigt wird, kann eine Entropiezunahme dadurch erreicht werden, dass durch Umwandlungsprozesse die interatomare Verzerrung in allen Richtungen gleich werden ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$). Dies kann z.B., wie im Bild 3.1.1b dargestellt, durch Gleitprozesse erreicht werden.

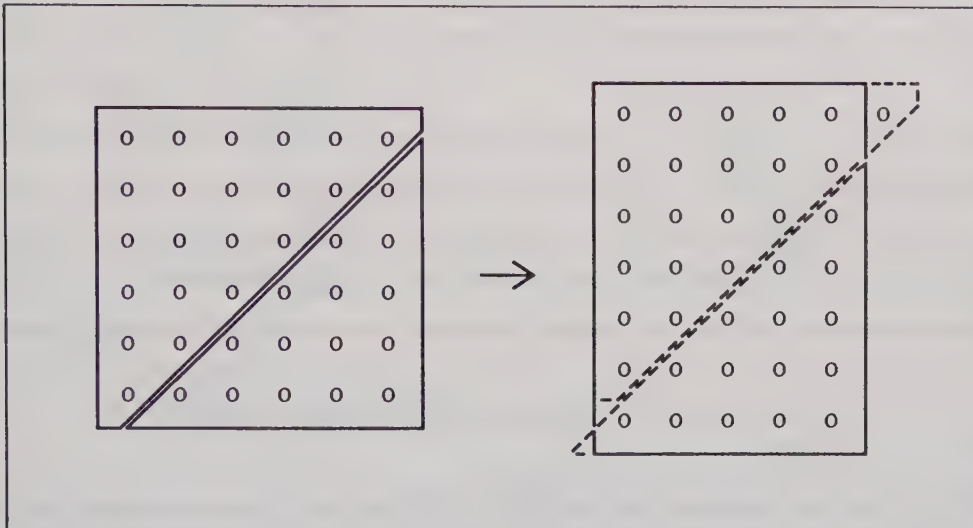


Bild 3.1.1b: Gleitprozess

Durch den Gleitprozess wird das Gitter im Volumen so umstrukturiert, dass Atome aus dichter besetzten Kristallachsen in die weniger dicht besetzten Kristallachsen verlagert werden. Der Gleitprozess wird solange stattfinden, bis die Verzerrung in allen Kristallachsen gleich ist. In Bild 3.1.1c ist dies für das verformte Idealgitter aus Bild 3.1.1a dargestellt.

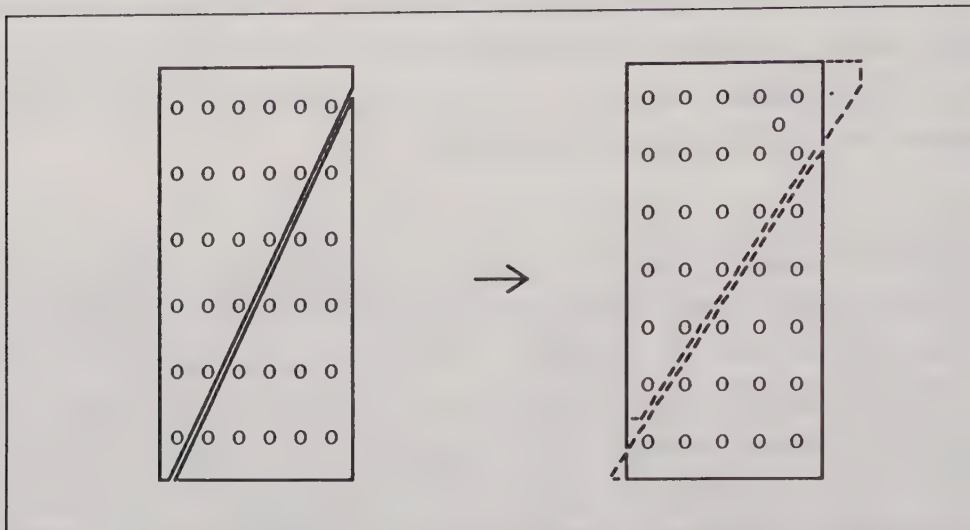


Bild 3.1.1c: Gleitprozess im verformten Idealgitter

Wird die Last zur Erzeugung der äusseren Verzerrung aufgehoben, entzerzt sich auch der Körper auf atomarer Ebene. Wie Bild 3.1.1d zeigt, ist durch die innere Umformung eine bleibende "plastische" Verformung aufgetreten.

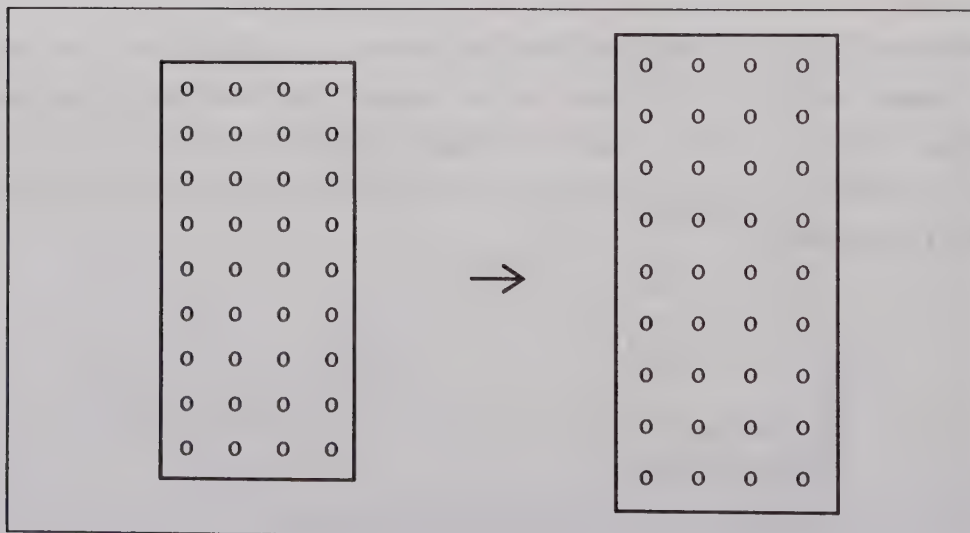


Bild 3.1.1d: "plastisch" verformtes Idealgitter

Im wirklichen Festkörper werden kaum solch "perfekte" Gleitprozesse stattfinden. In den meisten Fällen werden zusätzlich zu den durch Versetzungswanderungen verursachten Gleitprozessen auch Korngrenzengleitprozesse, Rekristallisation, Leerstellenwanderung sowie Verfestigungsphänomene die Umformung bestimmen (siehe [3.1] bis [3.9]). Zusammenfassend werden hier diese Phänomene als "Relaxationsquellen" bezeichnet. Analog zu der Versetzungsdichte kann dann von einer "Relaxationsquellendichte" gesprochen werden.

Die Veränderung der mikroskopischen oder "inneren" Verzerrung ist ein irreversibler Prozess, so dass die Entropie des Körpers zunimmt. Um dieses zu beschreiben muss die Entropie S des Festkörpers als Funktion der Verformung berechnet werden. Die Grundlagen für die nun folgende Berechnung sind in [3.10] bis [3.16] dargestellt. Im thermodynamischen Gleichgewicht kann die Entropie mittels des thermodynamischen Potentials des Festkörpers Ω durch

$$S = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_V \quad (3.1.1)$$

erreicht werden. T stellt hier die absolute Temperatur und V das betrachtete Volumen dar. Das thermodynamische Potential eines Festkörpers ist näherungsweise gleich

$$\Omega = U_g + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \lambda} \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k}) + k_B T \sum_{\vec{k}, \lambda} \ln \left(1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k})} \right), \quad (3.1.2)$$

wobei U_g die Gitterenergie, k_B die Boltzmann Konstante, β gleich $1/k_B T$, $\hbar$ die Planckkonstante, $\vec{k}$ der Wellenvektor und $\omega_{\lambda}(\vec{k})$ die Dispersion der Phononen ist. In der betrachteten Näherung werden nur die longitudinalen ($\lambda=l$) und transversalen ($\lambda=t_1$ und t_2) akustischen Phononen berücksichtigt. Mit Hilfe des Debye-Modells für die spezifische Wärmekapazität der Festkörper, in dem die Phononen als ein ideales Gas betrachtet werden, kann die Summe über die Wellenvektoren $\vec{k}_i$ durch eine Integration im ω -Raum ersetzt werden. Ist $g(\omega)$ die Anzahl Eigenwerte mit einem ω

zwischen ω und $\omega+d\omega$, dann ist das thermodynamische Potential näherungsweise

$$\Omega = U_g + \frac{1}{2} \int d\omega g(\omega) \hbar\omega + k_B T \int d\omega g(\omega) \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) . \quad (3.1.3)$$

Die spektrale Dichte $g(\omega)$ ergibt sich aus den Randbedingungen für die quantenmechanischen Wellenfunktionen des Festkörpers. Werden periodische Randbedingungen gefordert, so nimmt der Wellenzahlvektor die diskreten Werte

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, k_z = \frac{2\pi}{L} n_z \quad (3.1.4)$$

an, wo n_x, n_y und n_z ganzzahlig sind und L die Kantenlänge des betrachteten Volumens ist. Die Anzahl Wellenvektoren zwischen $\vec{k}$ und $\vec{k} + d\vec{k}$ ist folglich

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z \quad (3.1.5)$$

wo das Produkt der Kanten L^3 dem Volumen des Festkörpers V entspricht.

Jeder Wellenzahl sind drei Schwingungsmoden, eine longitudinale und zwei transversale zugeordnet. Sind deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_l , c_{t_1} und c_{t_2} , dann lauten im Debyeschen-Modell die Dispersionsrelationen

$$\omega = c_l |\vec{k}|, \omega = c_{t_1} |\vec{k}| \quad \text{und} \quad \omega = c_{t_2} |\vec{k}| . \quad (3.1.6)$$

Mit diesem Variablenwechsel ist die Summe über die Wellenvektoren $\vec{k}$ gleich

$$\sum_{\vec{k}, \lambda} \rightarrow \frac{3V}{2\pi^2 c_s^3} \int \omega^2 d\omega \quad (3.1.7)$$

mit

$$\frac{3}{c_s^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{1}{c_{t_1}^3} + \frac{1}{c_{t_2}^3} . \quad (3.1.8)$$

Die Summe (3.1.7) muss gleich der Anzahl Freiheitsgrade im System sein, was bei N Partikeln $3N$ ist. Die endliche Anzahl Freiheitsgrade begrenzt den Integrationsbereich in (3.1.7) auf Frequenzen kleiner als eine maximale Frequenz

$$\omega_D^3 = \frac{2\pi^2}{V} \frac{3N c_s^3}{}, \quad (3.1.9)$$

die Debyefrequenz genannt wird. Aus (3.1.7) folgt mit Hilfe von (3.1.9) die spektrale Dichte

$$g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2 \theta(\omega_D - \omega) , \quad (3.1.10)$$

in der $\theta(x)$ die Heaviside Funktion ist. Mit dieser spektrale Dichte ergibt sich aus (3.1.3) ein thermodynamisches Potential für einen Festkörper der Form

$$\Omega = U_g + \frac{3}{8} 3N\hbar\omega_D + 3Nk_B T \frac{3}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) . \quad (3.1.11)$$

Mit einer partiellen Integration und einem Variablenwechsel erhält man

$$\Omega = U_g + \frac{3}{8} 3Nk_B\theta_D + 3Nk_B T \ln(1 - e^{-\theta_D/T}) - 3Nk_B T D(\theta_D/T) \quad (3.1.12)$$

wobei die Abkürzung

$$D(y) = \frac{1}{y^3} \int_0^y dx \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (3.1.13)$$

eingeführt wurde und

$$\theta_D = \frac{\hbar \omega_D}{k_B} \quad (3.1.14)$$

die Debyetemperatur ist.

Im Fall einer scherungsfreien Verzerrung ϵ_i werden die Kantenlängen L des betrachteten Festkörpervolumens

$$L_x = L(1 + \epsilon_1), \quad L_y = L(1 + \epsilon_2) \quad \text{und} \quad L_z = L(1 + \epsilon_3) \quad (3.1.15)$$

sein. Folgt man der Herleitung der Debyeschen spektrale Dichte (3.1.10), so ist sie in diesem Fall durch

$$g(\omega) = \frac{9N}{\omega_D^3} (1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3) \omega^2 \quad (3.1.16)$$

gegeben. Die Integration erfolgt nicht über eine Kugel im ω -Raum mit Radius ω_D sondern über ein Ellipsoid mit den Hauptachsen

$$\frac{\omega_D}{1 + \epsilon_1}, \quad \frac{\omega_D}{1 + \epsilon_2} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_D}{1 + \epsilon_3}. \quad (3.1.17)$$

Um bei der Berechnung des thermodynamischen Potentials eine Integration über ein Ellipsoid im ω -Raum zu vermeiden, kann ein mittlerer Radius

$$\bar{\omega}_D = \frac{\omega_D}{1 + \bar{\epsilon}} \quad (3.1.18)$$

definiert werden. Die mittlere Verzerrung ist

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \frac{1}{3} I_1 \quad (3.1.19)$$

wobei I_1 die erste Invariante des Verzerrungstensors ist. Bis zur zweiten Ordnung in

der Verzerrung befinden sich in der Kugel mit Radius $\frac{\omega_D}{1+I_1/3}$ insgesamt nur

$$\int_0^{\frac{\omega_D}{1+I_1/3}} g(\omega) d^3\omega = 3N (1 - J_2) \quad (3.1.20)$$

der $3N$ Freiheitsgrade. J_2 ist gleich

$$J_2 = \frac{1}{2} ((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2) = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \quad (3.1.21)$$

wobei

$$I_2 = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3 \quad (3.1.22)$$

die zweite Invariante des Verzerrungstensors ist. Die in (3.1.20) fehlenden $3NJ_2$ Freiheitsgrade befinden sich zwischen dem ω -Ellipsoid und der ω -Kugel. In diesem Bereich ist das ω stets von der Grösse ω_D , so dass $g(\omega)$ um den Faktor

$$3N J_2 \delta(\omega - \omega_D) \quad (3.1.23)$$

korrigiert werden kann. Da bis in zweiter Ordnung in der Verzerrung

$$(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)(1+\epsilon_3) = 1 + I_1 + \frac{1}{3} I_1^2 - J_2 \quad (3.1.24)$$

ist, folgt für die Debyesche Spektraldichte eines verzerrten Festkörpers in der selben Näherung

$$g(\omega) = \frac{9N}{\bar{\omega}_D^3} \omega^2 \theta(\bar{\omega}_D - \omega) - J_2 \left[\frac{9N}{\omega_{D_0}^3} \omega^2 \theta(\omega_{D_0} - \omega) - 3N \delta(\omega - \omega_{D_0}) \right]. \quad (3.1.25)$$

wobei ω_{D_0} die Debyefrequenz des unverformten Festkörpers ist. Die Berechnung des

thermodynamischen Potentials aus (3.1.3) ergibt bis zur zweiten Ordnung in der Verzerrung

$$\begin{aligned}
 \Omega(I_1, J_2, T) = & U_g + \frac{3}{8} 3Nk_B \theta_{D_0} + 3Nk_B T \ln \left(1 - e^{-\theta_{D_0}/T} \right) - 3Nk_B T D(\theta_{D_0}/T) \\
 & - I_1 k_B N T \left[\frac{1}{8} \frac{\theta_D}{T} + D(\theta_D/T) \right] + \frac{1}{2^2 3^2} I_1^2 k_B N \theta_{D_0} \coth(\theta_{D_0}/2T) \\
 & + J_2 3Nk_B T \left[\frac{1}{8} \frac{\theta_{D_0}}{T} + D(\theta_{D_0}/T) \right]. \quad (3.1.26)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.1.1) und (3.1.26) kann die Entropie berechnet werden. Es ergibt sich

$$S(I_1, J_2, T) = S_0(T) + S_1(T) I_1 - S_{11}(T) I_1^2 - S_2(T) J_2 \quad (3.1.27)$$

mit

$$S_0(T) = 3k_B N \left[2^2 D(\theta_{D_0}/T) - \ln \left(1 - e^{-\theta_{D_0}/T} \right) \right] \quad (3.1.28)$$

$$S_1(T) = k_B N \left[2^2 D(\theta_{D_0}/T) - \frac{\theta_{D_0}}{T} \frac{1}{e^{\theta_{D_0}/T} - 1} \right] \quad (3.1.29)$$

$$S_{11}(T) = \frac{1}{2 \cdot 3^2} k_B N \left[\frac{\theta_{D_0}}{T} \right]^2 \frac{e^{\theta_{D_0}/T}}{\left(e^{\theta_{D_0}/T} - 1 \right)^2} \quad (3.1.30)$$

und

$$S_2(T) = 3Nk_B \left[2^2 D(\theta_D/T) - \frac{\theta_D}{T} \frac{1}{e^{\theta_D/T} - 1} \right]. \quad (3.1.31)$$

Die Wärmekapazität eines Festkörpers ist im Debyemodell gleich

$$C_V(T) = - T \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial T^2} \right]_V = 9Nk_B \left[2^2 \frac{D(\theta_D/T)}{T} - \frac{\theta_D}{T} \frac{1}{e^{\theta_D/T} - 1} \right], \quad (3.1.32)$$

so dass nach (3.1.29) und (3.1.31) sowohl S_1 als auch S_2 durch

$$S_1(T) = \frac{1}{3^2} C_V(T) \quad (3.1.33)$$

und

$$S_2(T) = \frac{1}{3} C_V(T) \quad (3.1.34)$$

ausgedrückt werden können.

Betrachtet man einen isotrop verformten Festkörper ($J_2 = 0$), so stellt man fest, dass nach (3.1.27) die Entropie bei einer Invarianten

$$I_{1_0} = \frac{1}{3^2} \frac{C_V(T)}{S_{11}(T)} \quad (3.1.35)$$

minimal wird. Entsprechend ist die Verzerrungsinvariante I_{1_0} eine Gleichgewichtsverzerrung des Gitters. Die zu betrachtenden Gitterverzerrungen müssen folglich um den Gleichgewichtswert korrigiert werden. Die Entropie ergibt dann als Funktion des korrigierten I_1

$$S(I_1', J_2, T) = S_0(T) + \frac{S_1(T)^2}{4S_{11}(T)} - S_{11}(T) I_1'^2 - S_2(T) J_2. \quad (3.1.36)$$

Die Änderung der interatomaren Verzerrung ist ein irreversibler Prozess, der angetrieben wird von der Änderung der Entropie mit der Verzerrung. Entsprechend kann der Prozess mit Hilfe der Onsager Relationen (siehe die allgemeinen Onsager Relationen in [3.11])

$$\frac{d}{dt} \epsilon_{ij} = G_{ijkl} \frac{\partial S}{\partial \epsilon_{kl}} . \quad (3.1.37)$$

beschrieben werden. G_{ijkl} ist ein vom Material abhängiger Tensor vierter Ordnung. Im Falle eines isotropen Materials reduziert sich der Tensor G_{ijkl} analog dem elastischen Tensor (siehe z.B. [2.12] oder [3.1]) auf

$$G_{ijkl} = G_1(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + G_2 \delta_{ij} \delta_{kl} . \quad (3.1.38)$$

Mit diesem Ausdruck lautet die Onsager-Relation (3.1.37)

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = - \frac{1}{\tau_2} \epsilon_{ij} + \frac{1}{3\tau_1} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (3.1.39)$$

mit

$$\frac{1}{\tau_2} = 2SG_2 \quad (3.1.40)$$

und

$$\frac{1}{\tau_1} = 2 \cdot 3 (2G_1 + 3G_2) S_{11} - 2G_1 S_2 \quad (3.1.41)$$

wobei τ_1 und τ_2 Relaxationszeiten sind. Bei Materialien, in denen nach der plastischen Verformung keine permanente Volumenänderung stattfinden (isochores Material), bleibt die erste Verzerrungsinvariante konstant. Eine Kontraktion von (3.1.39) zeigt, dass dies der Fall ist, wenn

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 \quad \left(\text{isochores Material, } \frac{d\epsilon_{kk}}{dt} = 0 \right) \quad (3.1.42)$$

ist. Ist die Relaxationszeit

$$\tau_1 > \tau_2 \quad \left(\text{endochores Material, } \frac{d\epsilon_{kk}}{dt} < 0 \right), \quad (3.1.43)$$

dann erfährt das Material eine permanente Volumenreduktion. Dieser Fall wird in einem porösen Material beobachtet. Risse in Festkörpern oder Kavitation in Flüssigkeiten entsprechen einer Porositätszunahme und müssen durch ein Material mit

$$\tau_1 < \tau_2 \quad \left[\text{exochores Material, } \frac{d\epsilon_{kk}}{dt} > 0 \right] \quad (3.1.44)$$

beschrieben werden.

Zu Beginn des Abschnitts wurden mehrere Mechanismen erwähnt, die die Relaxation bestimmen. Mechanismen wie Versetzungswanderungen und die dadurch verursachten Gleitprozesse sind ein relativ gut verstandenes Beispiel eines Verformungsmechanismus (siehe z.B. [3.1] und [3.2]). Bei Versetzungen sind mehrere Mechanismen bekannt, durch die sich die Versetzungsdichte zeitlich ändert. Es ist folglich zu erwarten, dass auch bei anderen Relaxationsmechanismen die Zahl der Relaxationsquellen und somit die Relaxationszeit sich zeitlich ändert. Im allgemeinen muss angenommen werden, dass die Relaxationszeit von der Anzahl Relaxationsquellen N_a abhängt. Ist ϵ_a die Aktivierungsenergie der Relaxationsquelle, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle einen Beitrag leisten kann durch den Boltzmannfaktor $e^{\beta\epsilon_a}$ gegeben. Mit einer Frequenz ν_a wird die Relaxationsquelle pro Zeit $\nu_a e^{\beta\epsilon_a}$ Beiträge zum Relaxationsprozess leisten. Der Kehrwert der Relaxationszeit kann dann aus

$$\frac{1}{\tau} = \frac{N_a}{N} \nu_a e^{-\beta\epsilon_a} \equiv n_a \frac{1}{\tau_0} \quad (3.1.45)$$

berechnet werden.

$$\tau_0 = \frac{1}{\nu_a} e^{\beta\epsilon_a} \quad (3.1.46)$$

ist die Relaxationszeit einer Relaxationsquelle und

$$n_a = \frac{N_a}{N} \quad (3.1.47)$$

die Relaxationsquellendichte. Die Relaxationsquellendichte kann sich durch die Verformung des Materials zeitlich verändern. So ist z.B. bei Versetzungen bekannt, dass durch Erzeugungsprozesse die Anzahl der Versetzungen zunehmen und durch Ausheilungsprozesse abnehmen kann. Bei hoher Dichte der Versetzungen können Wechselwirkungen ihre Beweglichkeit reduzieren und die Anzahl der zur Verformung beitragenden Versetzungen wird abnehmen. Um diese Kinetik zu beschreiben wird angenommen, dass die Erzeugung von neuen Relaxationsquellen nur von der Verformung und der Temperatur abhängt, nicht aber von der bestehenden Relaxationsquellendichte. Die zeitliche Abnahme der Relaxationsquellendichte durch Ausheilungsprozesse wird proportional zur Relaxationsquellendichte selbst sein. Ihre Abnahme durch die Wechselwirkung zwischen zwei oder mehreren Relaxationsquellen wird proportional zu einer Potenz der Relaxationsquellendichte sein. Mit der Annahme, dass vorwiegend Paarwechselwirkungen auftreten, wird hier eine quadratische Abhängigkeit angesetzt. Die Kinetik der Relaxationsquellendichte wird in dieser Betrachtung durch die Bilanz

$$\frac{dn_a}{dt} = q_a - r_a n_a - h_a n_a^2 \quad (3.1.48)$$

beschrieben. Die Parameter q_a , r_a und h_a werden sowohl von der Temperatur als auch von den Verzerrungsinvarianten abhängen. In einigen Fällen können sie direkt aus dem entsprechenden Verformungsmechanismus berechnet werden. Hinweise auf diese Arbeiten sind im Abschnitt 5.2. angegeben, wo diese Parameter genauer untersucht werden. Durch die zeitliche Änderung der Relaxationsquellendichte und entsprechend der Relaxationszeit wird im allgemeinen der Relaxationsprozess nicht exponentiell sein. Eine analoge Situation ergibt sich in der Arbeit von Queisser [3.17]. Nach Polder und Weiss [3.18] ist hierbei wesentlich, dass die Relaxationszeit nicht nur eine Funktion einer Variablen des Systems ist, sondern über die Differentialgleichung das Verhalten des Systems entscheidend beeinflusst.

Die Gleichungen (3.1.45), (3.1.46) und (3.1.48) beschreiben die Plastizität des Materials für ein System, bei dem die makroskopische oder äussere Verzerrung konstant ist. Im Abschnitt 3.2. wird (3.1.39) auf den Fall der zeitlichen Änderung der äusseren Verzerrung ausgedehnt.

3.2. Die Plastizitätsgleichung

Im Abschnitt 3.1. wurde die Relaxation der Verzerrung ϵ_{ij} im Material diskutiert. Diese Verzerrung entspricht der mittleren Verformung des atomaren Gitters, und ist folglich massgebend für die Berechnung der Spannung im Volumenelement. Die makroskopische Verschiebung entspricht in der Kontinuumsmechanik der Schwerpunktsverschiebung eines Volumenelementes, und enthält folglich keine Information über die mikroskopische Relativbewegung der Atome. Entsprechend ist die klassische Definition zwischen Verschiebung $\vec{u}$ und der mittleren atomaren Verzerrung ϵ_{ij} **nicht** notwendigerweise gegeben:

$$\epsilon_{ij} \neq \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]. \quad (3.2.1)$$

Im Fall das keine atomaren Umlagerungsprozesse stattfinden kann angenommen werden, dass die makroskopische Verzerrung der mittleren atomaren Verzerrung entspricht. Dies stellt die Hypothese der klassischen Kontinuumsmechanik dar. Da aber im betrachteten Modell atomare Umlagerungsprozesse stattfinden können, wird die mittlere atomare Verzerrung durch den Relaxationsprozess verändert (siehe Abschnitt 3.1). Die gesamte zeitliche Änderung der mittleren atomaren Verzerrung ergibt sich so aus dem Relaxationsprozess und dem Materialfluss. Der Materialfluss wird durch die makroskopische Verschiebung dargestellt. Ist die makroskopische Verschiebungsgeschwindigkeit

$$v_i = \frac{du_i}{dt}, \quad (3.2.2)$$

dann ist die zeitliche Änderung des mittleren atomaren Verzerrungstensors ϵ_{ij} wegen des Materialflusses durch

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.3)$$

gegeben. Die gesamte zeitliche Änderung der mittleren atomaren Verzerrung folgt aus (3.2.3) und (3.1.39) in der Form

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = -\frac{1}{\tau_2} \epsilon_{ij} + \frac{1}{3\tau_1} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.2.4)$$

Gleichung (3.2.4) stellt die "Plastizitätsgleichung" dar, und ersetzt die klassische Definition (2.2.1). Im Grenzfall unendlicher Relaxationszeiten reduziert sich (3.2.4) zu (2.2.1), so dass das beschriebene Modell der klassischen Kontinuumstheorie entspricht. Physikalisch bedeutet dies, dass während der Verformung keine Umlagerungsprozesse stattfinden, und somit das Material keine permanente Verformung erfährt. Finden hingegen Umlagerungsprozesse statt, zeigt (3.2.4), dass eine makroskopische Verformung zwar zu einer entsprechenden mittleren atomaren Verzerrung führt, die aber durch den Relaxationsprozess sich zeitlich ändern kann. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad führt, im Rahmen einer Kontinuumstheorie, zur Beschreibung der plastischen Verformung.

Da innerhalb einer Kontinuumstheorie die "makroskopische Verzerrung" der "Sichtbaren" Verzerrung eines Volumenelementes entspricht, wird sie im folgenden als "äussere Verzerrung" bezeichnet. Die "mittler atomare Verzerrung" dagegen, stellt einen "Inneren" Freiheitsgrad des Materials dar, und wird entsprechend "innere Verzerrung" genannt.

Aus der "Plastizitätsgleichung" (3.2.4) folgt für die erste Invariante $I_1 = \epsilon_{kk}$ des inneren Verzerrungstensors ϵ_{ij} die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} I_1 = -\frac{1}{\Delta\tau} I_1 + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (3.2.5)$$

die abhängig von Vorzeichen der Relaxationszeit

$$\frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \quad (3.2.6)$$

endo-, iso- oder exochores Materialverhalten zeigt (vgl. 3.1.42-44). Ohne Porosität ist die Dichte des Materials

$$\rho = \rho_0(1 - I_1), \quad (3.2.7)$$

wobei ρ_0 die Dichte des unverformten Materials ist. Leitet man (3.2.7) nach der Zeit ab, dann folgt mit Hilfe von (3.2.5) im isochoren Fall in linearer Näherung die klassische Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = -\rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (3.2.8)$$

Für den Fall, dass die Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 konstant sind, ergibt eine Integration der Differentialgleichung (3.2.5) in linearer Näherung

$$I_1(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-(t-t')/\Delta\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (3.2.9)$$

Mit diesem Ausdruck lässt sich das Gleichungssystem (3.2.4) separieren, so dass

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} + \frac{1}{\tau_2} \epsilon_{ij} = g_{ij} \quad (3.2.10)$$

mit

$$g_{ij} = \frac{1}{3\tau_1} \int_{-\infty}^t dt' e^{-(t-t')/\Delta\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.11)$$

ist. Die Plastizitätsgleichung (3.2.10) ist formal eine einfache lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Anders als bei der klassischen Kontinuumsmechanik, wo die

Verzerrung als Funktion der Verschiebung definiert wird, ist in diesem Fall die Verzerrung durch (3.2.4) beschrieben. In linearer Näherung kann die substantielle Ableitung in (3.2.10) durch eine partielle Zeitableitung ersetzt werden. Die Lösung von (3.2.10) lautet dann

$$\epsilon_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{-(t-t')/\tau_2} g_{ij}(\vec{x}, t'). \quad (3.2.12)$$

Diese Gleichung ersetzt für den Fall konstanter Relaxationszeiten die klassische Definition der Verzerrung, wie sie im Kapitel 2. durch (2.2.1.) eingeführt wurde. Die Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 spielen die Rolle einer Gedächtniszeit, so dass die Verzerrung von der zeitlichen Entwicklung der Verschiebung abhängt. Es bestehen zwei interessante Grenzfälle. In dem einen ist die Zeit, in der sich die Verschiebung ändert, viel grösser, im anderen viel kleiner als die Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 . Im ersten Fall ist das Material stets fast vollständig relaxiert. Es hat Zeit, sich jeder aufgebrachten Last durch Fließen anzupassen. Dies entspricht dem hydrodynamischen Grenzfall. Im zweiten Fall wird die Last so schnell aufgebracht, dass das Material kaum Zeit hat, die Verzerrung durch Fließen zu reduzieren was dem elastischen Grenzfall entspricht.

Für den elastischen Grenzfall kann (3.2.4) integriert und iterativ gelöst werden. Bestand für Zeiten $t < 0$ keine Verformung, ergibt dies

$$\epsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \int_0^t dt' \left[\frac{1}{\tau_2} \epsilon_{ij}(t') - \frac{1}{3\tau_1} \epsilon_{kk}(t') \right]. \quad (3.2.13)$$

Wenn die Zeit t gegenüber den Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 vernachlässigbar ist, reduziert sich (3.2.13) zur klassischen Relation zwischen Verschiebung und Verzerrung

$$\epsilon^{(0)}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.2.14)$$

Ist die verstrichene Zeit t gegenüber den Relaxationszeiten τ_1 und τ_2 nicht vernachlässigbar, dann folgt aus (3.2.13), dass in erster Näherung

$$\epsilon^{(1)}_{ij}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \int_0^t dt' \left[\frac{1}{2\tau_2} \left(\frac{\partial u_i(t')}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(t')}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3\tau_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(t') \delta_{ij} \right] \quad (3.2.15)$$

ist. Der Integralterm stellt den Beitrag der plastischen Verformung dar. Wird das Material einer äusseren Verzerrung $\partial u_i / \partial x_j$ unterworfen, so dass am Anfang und am Ende des Prozesses die äussere Verzerrung verschwindet, kann nach (3.2.15) die innere Verzerrung am Ende des Prozesses ungleich Null sein. Wie im Abschnitt 4.1. gezeigt wird, bedeutet dies, dass nach Abschluss des Prozesses das Material unter Spannung steht. Die ehemalige Form entspricht nicht mehr der Form des unbelasteten Materials nach dem Prozess: das Material ist plastisch verformt.

Für den hydrodynamischen Grenzfall soll ein isochores Material angenommen werden. In diesem Fall ergibt eine Kontraktion von (3.2.4), dass

$$\frac{d\epsilon_{kk}}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (3.2.16)$$

und somit dass

$$\epsilon_{kk} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}. \quad (3.2.17)$$

ist. Setzt man diesen Ausdruck in (3.2.4) ein und löst nach ϵ_{ij} auf, so ergibt sich die Gleichung

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \tau \frac{d\epsilon_{ij}}{dt}. \quad (3.2.18)$$

Für den Fall, dass die Relaxationzeit im Vergleich zur Zeitdauer des Versuches ver-

schwindend klein ist, folgt aus (3.2.18) in nullter Näherung

$$\epsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} . \quad (3.2.19)$$

Durch die schnelle Relaxation befindet sich das Material immer in einem isotropen Verzerrungs- oder Kompressionszustand. Für nicht vernachlässigbare Relaxationszeiten kann (3.2.18) iterativ gelöst werden. Es ergibt sich so in erster Ordnung

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\tau}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} . \quad (3.2.20)$$

Wie im Abschnitt 4.2. beschrieben, entsprechen die Terme in der Relaxationszeit den Einfluss der Viskosität der Flüssigkeit auf den Verformungszustand.

Gleichung (3.2.4) stellt nur die Verallgemeinerung der Verzerrungs-Verschiebungs Relation dar. Um aber das Verhalten des Materials zu beschreiben muss diese Gleichung in die klassische Kontinuumsmechanik eingebunden werden. Dies wird im nächsten Kapitel beschrieben.

4. Das Modell

Mit der Relaxationsgleichung im Kapitel 3. ist man in der Lage, die innere Verzerrung des Materials als Funktion der Verschiebung zu berechnen. Die Bewegung des Volumenelementes wird durch das Newtonsche Gesetz beschrieben. Die Kraft oder Spannung, die die Bewegung der Teilchen im Volumen induziert, muss aus der inneren Verzerrung berechnet werden. In der vorliegenden Betrachtung wird nur eine lineare Beziehung zwischen Verzerrungs- und Spannungstensor angenommen. Der "nichtlineare" Effekt im Stoffgesetz wird durch die Relaxation "erzeugt".

4.1. Die konstitutiven Gleichungen

Die Newtonsche Gleichung für ein Volumenelement lautet im Fall eines Kontinuums (siehe z.B. [4.1] oder [3.16])

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} , \quad (4.1.1)$$

wobei σ_{ij} der Spannungstensor, ρ die Dichte und v_i die Verschiebungsgeschwindigkeit ist. Die Spannung kann in erster Näherung als eine lineare Funktion der inneren Verzerrung durch die elastische Näherung

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (4.1.2)$$

beschrieben werden (siehe z.B. [4.1] oder [2.13]). G ist der Schubmodul und ν die Poissonsche Querkontraktionszahl des Materials. Gleichung (4.1.1) und (4.1.2) zusammen mit der Plastizitätsgleichung (3.2.4) für den isochoren Fall

$$\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = - \frac{1}{\tau} \epsilon_{ij} + \frac{1}{3\tau} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] , \quad (4.1.3)$$

der Relaxationszeit (3.1.45)

$$\tau = \frac{1}{n_a} \tau_0 , \quad (4.1.4)$$

der Kontinuitätsgleichung (3.2.8)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}), \quad (4.1.5)$$

und der Gleichung für die Reaktionskinetik (3.1.48)

$$\frac{dn_a}{dt} = q_a - r_a n_a - h_a n_a^2 \quad (4.1.6)$$

bilden im isothermen Fall die Grundlage für das Modell. Eine Erweiterung auf den allgemeinen Fall findet am Ende dieses Abschnittes statt.

Für den isochoren Fall verschwindet $\Delta\tau$ und der Tensor g_{ij} in (3.2.11) reduziert sich zu

$$g_{ij} = \frac{1}{3\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]. \quad (4.1.7)$$

Setzt man in (4.1.2) die Lösung (3.2.12) für die innere Verzerrung ein, folgt, dass die Spannung als Funktion des Tensors g_{ij} gleich

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = 2G \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[g_{ij}(\vec{x}, t') + \frac{\nu}{1-2\nu} g_{ll}(\vec{x}, t') \delta_{ij} \right] \quad (4.1.8)$$

ist. Führt man anschliessend den Ausdruck für g_{ij} aus (4.1.7) in (4.1.8) ein, folgt für den Spannungstensor

$$\sigma_{ij} = 2G \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[\left(\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{1}{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \frac{\nu}{1-2\nu} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (4.1.9)$$

was formal einem Ansatz

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \left[A_{ijpq}(\vec{x}, t-t') \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + B_{ijpq}(\vec{x}, t-t') \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \right] \quad (4.1.10)$$

entspricht. Ansätze wie (4.1.10) bilden die Grundlage der linearen Response-Theorie (siehe z.B. [4.4]). Im betrachteten Modell ist im allgemeinen die Relaxationszeit keine Konstante und somit (4.1.9) nicht im Rahmen einer linearen Response-Theorie behandelbar. Aus (4.1.9) und der Newtonsche Gleichung (4.1.1) folgt dann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (3.2.8) die Beziehung

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = 2G \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)\tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \frac{1}{2} \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]. \quad (4.1.11)$$

Mit der Definition der Kompressibilität

$$\kappa = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)G}, \quad (4.1.12)$$

der longitudinalen Schallgeschwindigkeit

$$c_l^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho_0(1-2\nu)} \quad (4.1.13)$$

und der transversalen Schallgeschwindigkeit

$$c_t^2 = \frac{G}{\rho_0} \quad (4.1.14)$$

lautet (4.1.11) in der linearen Näherung in $\vec{v}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}} \left[\frac{1}{\kappa \tau \rho_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + c_t^2 \nabla^2 \vec{v} + (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]. \quad (4.1.15)$$

Diese Gleichung zeigt eine formale Ähnlichkeit mit der nach Mori [4.2] verallgemeinerten Nicht-Markovsche Langevin Gleichung (siehe auch z.B. [4.3] und [4.4]). Diese lautet im eindimensionalen Fall

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \int_{-\infty}^t dt' A(t-t') v(t') + \frac{1}{m} F(t), \quad (4.1.16)$$

wobei $A(t)$ eine Gedächtnisfunktion, $F(t)$ eine Kraft und m die Partikelmasse ist. Physikalisch beschreibt sie ein System, dessen Dynamik durch die Vorgeschichte des Systems bestimmt wird. Die Exponentialfunktion spielt die Rolle einer Gedächtnisfunktion. Durch die Relaxation "vergisst" das Volumenelement teilweise die Vergangenheit.

Während des Relaxationsprozesses wird elastische Verformungsenergie in Wärme umgewandelt. Diese Wärme führt zu einer Temperaturerhöhung, die wiederum meist die Relaxationszeit reduziert. Im linearen elastischen Fall ist die elastische Verformungsenergie in einem Volumenelement dV (siehe z.B. [2.13]) gleich

$$U(\vec{x}, t) = dV \left[\frac{1}{2\kappa} I_1^2 + G J_2 \right]. \quad (4.1.17)$$

wobei I_1 die erste Verzerrungsinvariante und J_2 durch (3.1.21) als Funktion der ersten und zweiten Verzerrungsinvariante definiert wurde. Durch die Relaxation ändert sich der innere Verzerrungstensor ϵ_{ij} und folglich die gespeicherte elastische Verzerrungsenergie. Leitet man (4.1.17) nach der Zeit ab, so folgt mit Hilfe der Plastizitätsgleichung (4.1.3) ohne Änderung der äusseren Verzerrung

$$\frac{dU_{\text{rel}}}{dt} = dV \left[\frac{1}{2\kappa\Delta\tau} I_1^2 + \frac{2G}{\tau_2} J_2 \right]. \quad (4.1.18)$$

Iso- und endochore Materialien werden elastische Energie durch den Relaxationsprozess in Wärme umwandeln. Ein hypothetisches exochores Material könnte dagegen bei einer isotropen Verformung elastische Energie "gewinnen". In diesem Fall müsste in einem exochoren Material ein Relaxationsprozess stattfinden, der nicht nur die Entropie erhöht, sondern dabei auch mechanische Energie erzeugt. Der Prozess setzt folglich voraus, dass das Material über eine Energiequelle verfügt.

Die Wärme im Volumenelement dV kann sich sowohl durch die Relaxationsprozesse als auch durch Wärmeleitung ändern. Ist λ der Wärmeleitungskoeffizient, dann ist der Wärmefluss nach Fourier [4.5]

$$\left(\frac{dQ}{dt} \right)_{\text{fluss}} = dV \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T). \quad (4.1.19)$$

Insgesamt ist folglich die Änderung der Wärme durch

$$\frac{dQ}{dt} = dV \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + dV \left[\frac{1}{2\kappa\Delta\tau} I_1^2 + \frac{2G}{\tau_2} J_2 \right] \quad (4.1.20)$$

gegeben. Die Wärme kann sowohl die Energie U_0 im Material vergrößern als auch Arbeit A verrichten. Nach dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre ist

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dU_0}{dt} + \frac{dA}{dt}. \quad (4.1.21)$$

Die Arbeitsänderung lässt sich aus der Spannung σ_{ij} und äusseren Verschiebungsgeschwindigkeit v_i durch

$$\frac{dA}{dt} = - dV \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) \quad (4.1.22)$$

berechnen. Die Energie des Materials U_0 besteht aus der kinetischen und der inneren Energie. Ist U_i die innere Energie, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit und ρ die Dichte, dann ist

$$U_0 = \frac{1}{2} \rho dV \vec{v}^2 + U_i dV . \quad (4.1.23)$$

Die innere Energie ändert sich sowohl wegen der elastischen Verformung als auch durch die entstandene Temperaturerhöhung. Ist $c(T)$ die spezifische Wärmekapazität bei einer absoluten Temperatur T , dann ist

$$\frac{dU_i}{dt} = \frac{dU_{el}}{dt} + \rho c(T) \frac{dT}{dt} . \quad (4.1.24)$$

Die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie ist mit Hilfe von (4.1.1)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho dV \vec{v}^2 \right] = dV v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \vec{v}^2 \frac{d\rho}{dt} . \quad (4.1.25)$$

Die Spannung σ_{ij} ist proportional zum Schubmodul und somit zum Quadrat der transversalen Schallgeschwindigkeit. Folglich ist bei Geschwindigkeiten viel kleiner als die Schallgeschwindigkeit der letzte Term in (4.1.25) vernachlässigbar. Da

$$v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = dV \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) - \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4.1.26)$$

ist, folgt aus (4.1.18), (4.1.22) und (4.1.25), dass

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho dV \vec{v}^2 \right] = - \frac{dA}{dt} - \frac{dU_{el}}{dt} \quad (4.1.27)$$

ist. Aus (4.1.20) bis (4.1.27) folgt somit

$$dV \rho c(T) \frac{dT}{dt} = dV \vec{\nabla} \cdot (\lambda \nabla T) + dV \left[\frac{1}{2\kappa\Delta\tau} I_1^2 + \frac{2G}{\tau_2} J_2 \right], \quad (4.1.28)$$

was nach der Ableitung der Temperatur nach der Zeit aufgelöst

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho c} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{1}{\rho c} \left[\frac{1}{2\kappa\Delta\tau} I_1^2 + \frac{2G}{\tau_2} J_2 \right] \quad (4.1.29)$$

ergibt. Der letzte Ausdruck entspricht einer Wärmequelle, die vor allem bei grossen Verzerrungen zur Erwärmung des Materials führt. In inhomogenen Bereichen des Materials kann diese Erwärmung eine entscheidende Rolle spielen. Dies wird im Abschnitt 6.2. als möglicher Mechanismus für das Risswachstum diskutiert.

Auch die Wärmeausdehnung des Materials muss in der Spannung berücksichtigt werden. Ist α der Wärmeausdehnungskoeffizient, T die absolute Temperatur in $\vec{x}$ zur Zeit t und T_0 die Temperatur vor der Verformung, so muss nach [2.13] in diesem Fall (4.1.2) durch

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] + \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (4.1.30)$$

ersetzt werden.

Bevor in den Kapiteln 5. bis 8. das komplexe Verhalten der Materialien mit dem Modell verglichen wird, ist es von Interesse die im Abschnitt 3.2. dargestellten Grenzfälle in bezug auf das gesamte Gleichungssystem zu betrachten.

4.2. Die einfachen Grenzfälle

Im Abschnitt 3.2. wurden zwei Grenzfälle betrachtet. Im hydrodynamischen Grenzfall ergab sich, dass die innere Verzerrung in erster Näherung durch (3.2.20) beschrieben wird. Mit der Definition der Spannung in der elastischen Näherung (4.1.2) und der Kompressibilität (4.1.12) ist die Spannung

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} + G \tau \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} \right]. \quad (4.2.1)$$

Für den Grenzfall vernachlässigbarer Relaxationszeit reduziert sich (4.1.1) mit der nullten Ordnung von (4.2.1) zu

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (4.2.2)$$

Führt man den Druck p durch

$$p = - \frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \quad (4.2.3)$$

ein, so lautet (4.2.2)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} p. \quad (4.2.4)$$

Dies ist die Strömungsgleichung einer "idealen Flüssigkeit" (Eulergleichung), d.h. ohne Viskosität (siehe [4.6] oder [4.7]). Ist die Relaxationszeit nicht vernachlässigbar,

dann lautet (4.1.1) mit Hilfe von (4.2.1) in erster Ordnung

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{1}{\kappa} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \tau G \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \tau G \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) . \quad (4.2.5)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Navier-Stokes Gleichung

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) , \quad (4.2.6)$$

so stellt man fest, dass (4.2.5) eine Strömung mit den Zähigkeiten

$$\eta = G \tau \quad (4.2.7)$$

und

$$\zeta = 0 \quad (4.2.8)$$

beschreibt. Nach Budó [4.8] entspricht das Verschwinden von ζ der Tatsache, dass die dissipierte Leistung positiv ist. Demnach ergibt dieser Grenzfall, dass das viskose Verhalten der Flüssigkeit dem Relaxationsprozess im hydrodynamischen Fall entspricht.

Im elastischen Grenzfall wurde die Verzerrung durch (3.2.15) beschrieben. In diesem Fall folgt aus (4.1.1), dass für ein isochores Material die Spannung in erster Ordnung gleich

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} \right] - \frac{2G}{\tau} \int_0^t dt' \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \delta_{ij} \right] \quad (4.2.9)$$

ist. In nullter Ordnung spielt das Integral keine Rolle und aus (4.1.1) folgt mit den Definitionen (4.1.13) und (4.1.14), dass in linearer Näherung in der Geschwindigkeit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = c_t^2 \nabla^2 \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (4.2.10)$$

ist. Diese Gleichung entspricht der klassischen Wellengleichung und entspricht in (4.1.11) dem Fall unendlicher Relaxationszeit. Wird der Einfluss der Relaxation berücksichtigt folgt aus (4.2.9), dass (4.1.1) in der linearen Näherung in der Geschwindigkeit gleich

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = c_t^2 \nabla^2 \vec{u} + (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \frac{c_t^2}{\tau} \int_0^t dt' \left(\nabla^2 \vec{u} - \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) \quad (4.2.11)$$

ist. In diesem Fall kann diese Gleichung keiner bekannten Verformungsgleichung zugeordnet werden. Sie bildet in erster Ordnung die Verformungsgleichung des Modells für eine plastische Verformung bei konstanter Relaxationszeit. Eine genauere Betrachtung der plastischen Verformung wird bei der Diskussion des Kriechversuchs im Abschnitt 5.2 folgen.

Ein erster Hinweis auf das Materialverhalten für beliebige Relaxationszeiten liefert die Lösung von (4.1.9) für die Schallfortpflanzung. Dies wird für den Fall einer konstanten Relaxationszeit im nächsten Abschnitt beschrieben.

4.3. Das Schwingverhalten des Materials

Eine Lösung des Modells für beliebige Zeitskalen stellt die Schallfortpflanzung für konstante Relaxationszeiten dar. Zur Vereinfachung wird hier ein isochores Material angenommen, d.h. $\tau_1 = \tau_2 = \tau$. Hierfür kann (4.1.11) in einer anderen Form geschrieben werden. Wird die Gleichung mit dem Faktor $e^{t/\tau}$ multipliziert und nach der Zeit abgeleitet, so erhält man

$$\frac{\partial^3 \vec{u}}{\partial t^3} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + c_t^2 \nabla^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (4.3.1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung muss nicht separierbar sein. Im Fall einer ebenen Welle kann die Lösung die Form

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}) + st/\tau} \quad (4.3.2)$$

haben, wobei s eine komplexe Zahl, $\vec{u}_0$ die Amplitude und $\vec{k}$ der Wellenzahlvektor ist. Der Imaginärteil von s/τ entspricht der Frequenz der Schwingung. Ist der Realteil negativ, dann ist die Lösung gedämpft, andernfalls ist diese instabil. Setzt man den Ansatz (4.3.2) in (4.3.1) ein, dann erhält man für s als Funktion des Wellenzahlvektors $\vec{k}$ die Gleichung

$$\vec{k}^2 \vec{u}_0 + \alpha \vec{k} \left[\vec{k} \cdot \vec{u}_0 \right] - \beta \vec{u}_0 = \vec{0} \quad (4.3.3)$$

mit

$$\alpha = \frac{c_l^2}{c_t^2} - 1 + \frac{1}{\kappa \rho_0 c_t^2} \frac{1}{s} \quad (4.3.4)$$

und

$$\beta = \frac{1}{\tau^2 c_t^2} s(1+s) . \quad (4.3.5)$$

Mit Hilfe von (4.1.13) bis (4.1.14) lassen sich α und β als

$$\alpha = \frac{3s + 2(1+\nu)}{3s(1-2\nu)} \quad (4.3.6)$$

$$\beta = \frac{s(1+s)}{c_t^2 \tau^2} \quad (4.3.7)$$

schreiben. Analog zu der elastischen Schwingungsgleichung (4.2.10) erhält man zwei Schwingungsmoden. Die longitudinale Mode erfüllt die Gleichung

$$\vec{\nabla}_x \vec{u}_1 = \vec{0} , \quad (4.3.8)$$

d.h. der Wellenzahlvektor $\vec{k}$ ist parallel zur Schwingungsamplitude $\vec{u}_0$. In diesem Fall reduziert sich (4.3.3) zu

$$\vec{k}^2 (1 + \alpha) + \beta = 0 \quad (4.3.9)$$

oder, wenn nach $\vec{k}^2$ aufgelöst, zu

$$\vec{k}^2 = - \frac{\beta}{1 + \alpha} . \quad (4.3.10)$$

Der Faktor auf der rechten Seite lässt sich mit den Definitionen von α und β zu

$$\frac{\beta}{1 + \alpha} = \frac{s^2(1+s)}{s_0+s} \frac{1}{c_1^2 \tau^2} \quad (4.3.11)$$

umschreiben, wobei

$$s_0 = \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \quad (4.3.12)$$

ist. Gleichung (4.3.10) und (4.3.11) ergeben somit den Ausdruck

$$c_1^2 \tau^2 \vec{k}^2 = - \frac{s^2(1+s)}{s+s_0} \quad (4.3.13)$$

zur Berechnung von s in Funktion des Wellenzahlvektors $\vec{k}$. Aus (4.3.13) folgt die kubische Gleichung der Form

$$s^3 + s^2 + \xi s^2 + \xi s_0 = 0 \quad (4.3.14)$$

mit

$$\xi = c_1^2 \tau^2 k^2. \quad (4.3.15)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Diskriminante von (4.3.14) positiv ist. Folglich ist eine Wurzel reell und zwei komplex. Sie sind analytisch berechenbar und in graphischer Form in den folgenden Bildern dargestellt. In Bild 4.3.1 ist die reelle Lösung für verschiedene Querkontraktionsmodule angegeben.

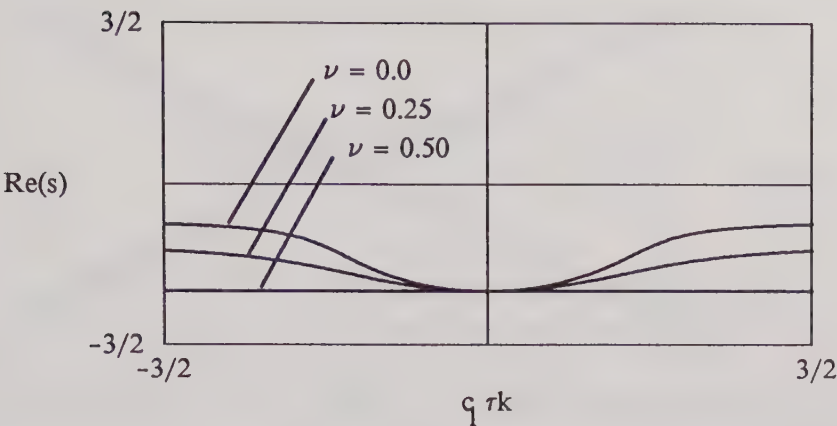


Bild 4.3.1: Reelle Wurzel aus (4.3.14) als Funktion des Faktors $c_1 \tau k$ für ν gleich 0.0, 0.25 und 0.5.

Der Real- und Imaginärteil der anderen zwei Lösungen sind in den Bildern 4.3.2 und 4.3.3 dargestellt. Der Realteil ist für beide Lösungen gleich, der imaginäre Teil unterscheidet sich nur im Vorzeichen.

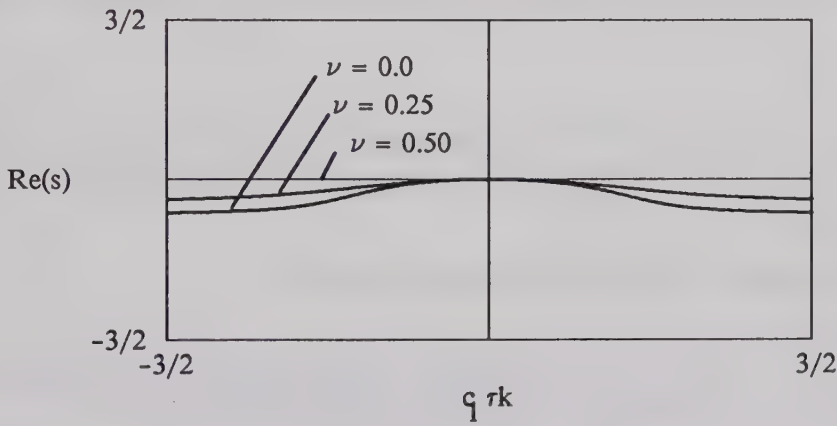


Bild 4.3.2: Realteil der zweiten und dritten Wurzel aus (4.3.14) als Funktion des Faktors $c_1 \tau k$ für ν gleich 0.0, 0.25 und 0.5 .

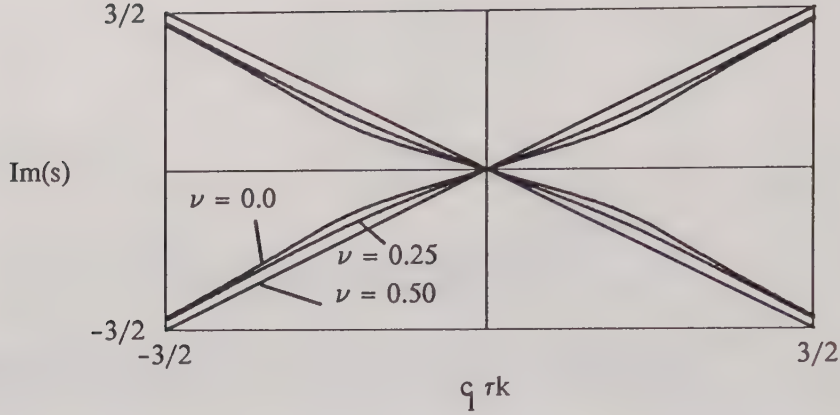


Bild 4.3.3: Imaginärteil der zweiten und dritten Wurzel aus (4.3.14) als Funktion des Faktors $c_1\tau k$ für ν gleich 0.0, 0.25 und 0.5 .

Beide Realanteile sind negativ, d.h. alle Lösungen sind stabil und gedämpft. Im Fall eines elastischen Verhaltens des Materials ist ξ viel grösser als eins. In diesem Grenzfall reduzieren sich die Wurzeln zu

$$s_1 = -s_0 - s_0^2(1-s_0) \frac{1}{\xi} - s_0^3(1-s_0)(2-3s_0) \frac{1}{\xi^2} + O(1/\xi^3) \quad (4.3.16)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2}(1-s_0) + \frac{s_0^2(1-s_0)}{2} \frac{1}{\xi} \pm i \left[\xi^{1/2} - \frac{(1+3s_0)1-s_0}{2^3} \frac{1}{\xi^{1/2}} + O(1/\xi^{3/2}) \right] \quad (4.3.17)$$

Aus (4.3.12) und (4.3.15) folgt die Dispersionsrelation

$$\omega = \pm c_1 k \left[1 - \frac{1}{2.3} \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{1}{c_1^2 \tau^2 k^2} \right] + O(1/c_1^3 \tau^3 k^3), \quad (4.3.18)$$

d.h. in erster Näherung die eines elastischen Kontinuums. Die Korrektur entspricht einer Schallgeschwindigkeitsverminderung, die der Relaxationsfähigkeit Rechnung trägt. Bei einer Relaxation reagiert das Material "weicher" auf die Schallwelle.

Im Grenzfall ξ viel kleiner als eins, erhält man die Wurzeln

$$s_1 = -1 + (1-s_0)\xi + (1-2s_0)(1-s_0)\xi^2 + O(\xi^3) \quad (4.3.19)$$

und

$$s_2 = - \left[\frac{1-s_0}{2} \xi + \frac{(1-2s_0)(1-s_0)}{2} \xi^2 + O(\xi^3) \right] \\ \pm i \left[s_0^{1/2} \xi^{1/2} - s_0^{1/2} (1-5s_0)(1-s_0) \xi^{3/2} + O(\xi^{5/2}) \right]. \quad (4.3.20)$$

Mit Hilfe von (4.3.12) und (4.3.15) folgt aus (4.3.20) in diesem Grenzfall die Dispersionsrelation

$$\omega = \pm \frac{1}{(\kappa\rho_0)^{1/2}} k \left[1 - 2^2(1+4\nu)(1-2\nu) \frac{\tau^2}{\kappa\rho_0} k^2 \right], \quad (4.3.21)$$

wobei κ die Kompressibilität und ρ_0 die Dichte ist. Der Term $\frac{1}{(\kappa\rho_0)^{1/2}}$ entspricht der Schallgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit. Im Grenzfall $\xi \ll 1$ verhält sich das Material folglich wie eine Flüssigkeit. Der Korrekturterm in (4.3.21) verhält sich analog der Korrektur der Dispersionsrelation (4.3.18) im elastischen Grenzfall.

Im Fall der Transversalwellen ist der Wellenzahlvektor $\vec{k}$ senkrecht zur Schwingamplitude $\vec{u}_0$, so dass sich (4.3.2) für s ungleich Null zu

$$k^2 + \beta = 0 \quad (4.3.22)$$

reduziert. Mit (4.3.5) folgt die quadratische Gleichung in s :

$$s^2 + s + c_t^2 \tau^2 k^2 = 0. \quad (4.3.23)$$

Die Lösungen sind

$$s = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} (1 - 4 c_t^2 \tau^2 k^2)^{1/2}. \quad (4.3.24)$$

In Bild 4.3.4 und 4.3.5 sind Realteil und Imaginärteil von s dargestellt.

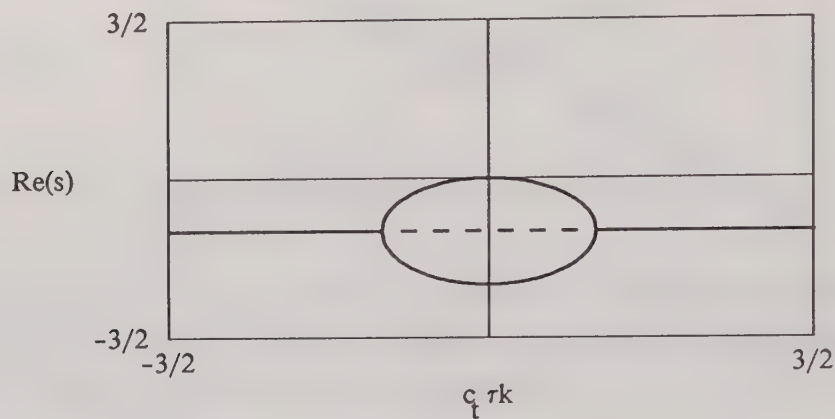


Bild 4.3.4: Realteil der Funktion s für Transversalschwingungen.

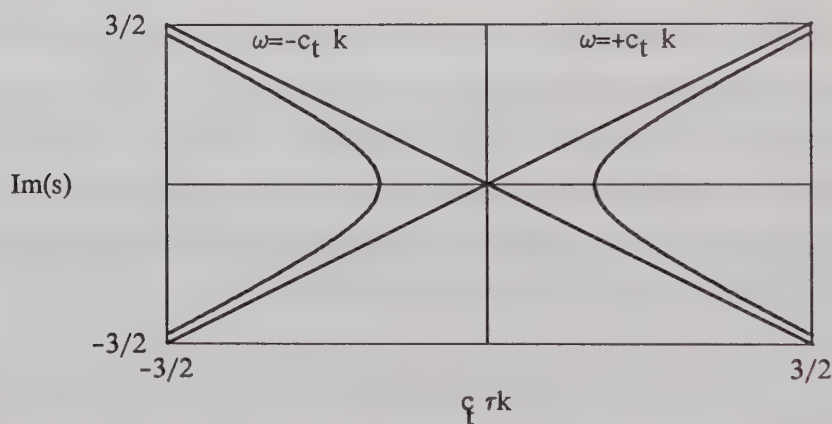


Bild 4.3.5: Imaginärteil der Funktion s für Transversalschwingungen.

Aus Bild 4.3.4 folgt, dass alle Lösungen gedämpft sind. Nach Bild 4.3.5 ist eine Schwingung mit einem Wellenzahlvektor kleiner als

$$k_0^2 = \frac{1}{4c_t^2 \tau^2} = \frac{\rho_0}{4 \eta \tau} \quad (4.3.25)$$

nicht möglich. Für Wellenzahlvektoren k viel grösser als k_0 ist die Dispersionsrelation

$\omega(k)$ linear. Die Dämpfung ist von der Schwingfrequenz unabhängig. In einem quasi-elastischen Material ist der betrachtete Wellenzahlvektor k immer viel grösser als k_0 , so dass

$$\operatorname{Re}(s) = -\frac{1}{2} \quad (4.3.26)$$

und

$$\operatorname{Im}(s) = \pm \left[c_t \tau k - \frac{1}{2^3 c_t \tau k} \right] + O(1/\tau^3 c_t^3 k^3) \quad (4.3.27)$$

ist. Die Dispersionsrelation lautet in diesem Fall

$$\omega = \pm \left[c_t k - \frac{1}{2^3 \tau^2} \frac{1}{c_t k} \right] + O(1/\tau^4 c_t^3 k^3) . \quad (4.3.28)$$

Im Fall einer Flüssigkeit ist dagegen $c_t \tau k$ viel kleiner als eins. In diesem Fall sind beide Lösungen reell und somit stellen sie keine Schwingung dar. Die Transversalmoden klingen zeitlich exponentiell ab. Der Korrekturterm in (4.3.28) verhält sich analog der Korrektur der Dispersionsrelation (4.3.18) im elastischen Grenzfall. Im Grenzfall $c_t \tau k \ll 1$ reduzieren sich die beiden Wurzeln von (4.3.24) zu

$$s_1 = -1 + \frac{\eta \tau}{\rho_0} k^2 + \eta^2 \tau^2 \frac{k^4}{\rho_0^2} + O((\eta \tau k^2 / \rho_0)^3) \quad (4.3.29)$$

und

$$s_2 = -\frac{\eta \tau}{\rho_0} k^2 - \eta^2 \tau^2 \frac{k^4}{\rho_0^2} + O(\eta \tau k / \rho_0)^3) . \quad (4.3.30)$$

Dieser Grenzfall entspricht dem "flüssigen" Verhalten, das durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben wird. Die Transversalmoden sind, wie bei Flüssigkeiten bekannt, gedämpft und stellen nicht propagierende Lösungen der Schwingungsgleichung dar.

Die Lösung der Schwingungsgleichung zeigt einen kontinuierlichen Übergang zwi-

schen den "elastischen" und "hydrodynamischen" Lösungen der Longitudinalmoden. Bei Transversalmoden sind hingegen beide Grenzfälle markant getrennt. Diese Grenze ist durch den Wellenzahlvektor (4.3.25) charakterisiert, unterhalb dem keine Propagation möglich ist.

5. Vergleich des Modells mit bekannten Materialeigenschaften

Die im Abschnitt 4.2. betrachteten Grenzfälle reduzieren das konstitutive Gleichungssystem auf bekannte Gleichungen wie die Navier-Stokes Gleichung und die Schwingungsgleichung. Im vorliegenden Kapitel soll nun das konstitutive Gleichungssystem für Fälle gelöst werden, für die eine Beschreibung des Materialverhaltens mit den im Abschnitt 4.2. betrachteten Grenzfällen nicht zufriedenstellend ist. In diesem Fall müssen die Lösungen mit experimentell bestimmten Materialeigenschaften und bekannten Faustformeln verglichen werden. Zur Vereinfachung wird im Abschnitt 5.1. das konstitutive Gleichungssystem auf den quasi-eindimensionalen Fall eines Stabes (Länge $\gg$ Durchmesser) reduziert. In dieser Näherung werden im Abschnitt 5.2. die Spannungsrelaxation und das Kriechen des Materials berechnet und mit Messresultaten verglichen. Im Abschnitt 5.3. wird anschliessend der Einfluss der Relaxation auf die Schalldämpfung berechnet und den Messergebnissen an unterschiedlichen Materialien gegenübergestellt.

5.1. Der eindimensionale Fall

Betrachtete man einen Stab, d.h. einen Körper, dessen Durchmesser viel kleiner als seine Länge ist, so lässt sich die Schwingungsgleichung (4.3.1) vereinfachen. In Analogie zur klassischen Theorie der Schallübertragung in Stäben (siehe [5.1] bis [5.3]) kann angenommen werden, dass der Stabquerschnitt spannungsfrei ist, d.h.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \quad (5.1.1)$$

gilt. Bestehen auch keine Scherungen des Materials, ist

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (5.1.2)$$

und aus (4.1.2) folgt für $i \neq j$

$$\epsilon_{ij} = 0 \quad (i \neq j) . \quad (5.1.3)$$

Aus der Bedingung, dass keine Spannungen senkrecht zur Stabachse wirken (5.1.1), folgt aus (4.1.2), dass

$$\epsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \quad (5.1.4)$$

und

$$\epsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 0 \quad (5.1.5)$$

gelten muss. Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, dann ist

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \quad (5.1.6)$$

was in (5.1.4)

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{33} \quad (5.1.7)$$

ergibt. Alle ϵ_{ij} lassen sich so auf ϵ_{33} zurückführen. Durch (4.1.2) kann folglich auch die Spannungskomponente in der Stabsachse σ_{33} als Funktion des ϵ_{33} dargestellt werden. Mit (5.1.7) und der Beziehung (siehe z.B. [2.12])

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (5.1.8)$$

zwischen Elastizitätsmodul E , Querkontraktionsmodul ν und Schubmoduls G , folgt aus (4.1.2)

$$\sigma_{33} = E \epsilon_{33} . \quad (5.1.9)$$

Im Fall eines isochoren Materials folgt aus (3.2.5) für die Volumenänderung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = (1-2\nu) \epsilon_{33} \quad (5.1.10)$$

wobei $\vec{u}$ die Verschiebung ist. Mit diesem Ausdruck reduziert sich (3.2.4) zu

$$\frac{d\epsilon_{33}}{dt} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \epsilon_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (5.1.11)$$

Betrachtet man kleine Verformungen und Verschiebungen, dann ist in der linearen Näherung die substantielle gleich der partiellen Ableitung. Gleichung (5.1.11) lautet dann entsprechend

$$\frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial t} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \epsilon_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (5.1.12)$$

Aus (3.2.4) und (5.1.7) folgen analog für die Verschiebungen senkrecht zur Stabachse

$$-\nu \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial t} - \frac{1+\nu}{3\tau} \epsilon_{33} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (5.1.13)$$

Auch in (4.1.1) kann die substantielle durch die partielle Ableitung ersetzt werden. In der linearen Näherung kann weiter die Dichte ρ durch die Dichte des unverformten Mediums ρ_0 ersetzt werden. So folgt aus (4.1.1) in Richtung der Stabsachse, dass

$$\rho_0 \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \quad (5.1.14)$$

ist. Mit Hilfe von (5.1.9) erhält man

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial z} \quad (5.1.15)$$

wobei

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_0} \quad (5.1.16)$$

die longitudinale Schallgeschwindigkeit im Stab ist. Leitet man (5.1.15) nach z ab, so folgt im Fall konstanter Relaxationszeiten mit der Ableitung von (5.1.12) nach der Zeit t die Wellengleichung für die innere Verzerrung

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial z^2}. \quad (5.1.17)$$

Leitet man (5.1.12) nach z ab, so können die Terme $\partial^2 \epsilon_{33} / \partial z \partial t$ und $\partial \epsilon_{33} / \partial z$ aus (5.1.15) und dessen Ableitung nach der Zeit t durch Terme in v_z ersetzt werden. Man erhält so eine Wellengleichung für die Verschiebungsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \frac{\partial v_z}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \quad (5.1.18)$$

Dies entspricht der typischen Wellengleichung mit viskoser Dämpfung. Allerdings ist

dies eine Wellengleichung für die Verschiebungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ und nicht für die Verschiebung $\vec{u}$. Dies hat zur Folge, dass die stationäre Lösung ($\partial v_z / \partial t = 0$) einem Fließen des Materials entspricht. Dieses Fließen verursacht das Kriechen und die Spannungsrelaxation im Material. Beide Effekte werden im folgenden Abschnitt näher diskutiert.

5.2. Spannungsrelaxation und Kriechen

Unter Kriechen versteht man das plastische Fließen eines Festkörpers unter einer konstanten Last. Ist diese durch die axiale Spannung σ_0 gegeben, bleibt die innere Verzerrung ϵ_{33} zeitlich konstant. Nach der Gleichung für die Kinetik der Relaxationsquellendichte (3.1.48) und der Definition der Relaxationszeit durch (3.1.45) ist nach (5.1.12) und (5.1.9) die axiale äussere Verzerrungsrate

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{3\pi(\sigma_0)} \frac{\sigma_0}{E} . \quad (5.2.1)$$

eine Funktion der Zeit. Aus (5.1.13) und (5.2.1) folgt, dass die äusseren Verzerrungsraten

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{2} \frac{2(1+\nu)}{3\pi(\sigma_0)} \frac{\sigma_0}{E} \quad (5.2.2)$$

ebenfalls zeitabhängig sind. Nach (5.2.1) und (5.2.2) ist dagegen die Volumenänderungsrate

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 . \quad (5.2.3)$$

zeitunabhängig. Da die innere Verzerrung im Kriechversuch konstant bleibt, stellt diese eine ideale Grundlage dar, um die Kinetik der Relaxationsquellendichte zu studieren. Die Faktoren q_a , r_a und h_a sind von den Invarianten der inneren Verzerrung J_2 aus (3.1.21) und I_1 aus (3.1.19) abhängig. Da in diesem Fall

$$I_1 = (1-2\nu)\epsilon_{33} = (1-2\nu) \frac{\sigma_0}{E} \quad (5.2.4)$$

und

$$J_2 = (1+\nu)^2 \frac{\sigma_0^2}{E^2}, \quad (5.2.5)$$

ist, sind die Faktoren nur von der Spannung σ_0 abhängig. Entsprechend ist (3.1.48) gleich

$$\frac{dn_a}{dt} = q_a(\sigma_0) - r_a(\sigma_0) n_a - h_a(\sigma_0) n_a^2. \quad (5.2.6)$$

Bei hohen Temperaturen werden vor allem Erzeugungs- und Ausheilungsprozesse die Kinetik der Relaxationsquellendichte bestimmt. In diesem Fall kann (5.2.6) zu

$$\frac{dn_r}{dt} = q_a(\sigma_0) - r_a(\sigma_0) n_a \quad (5.2.7)$$

vereinfacht werden. Da die Spannung σ_0 konstant ist, ergibt die Integration von (5.2.7)

$$n_r(t) = (n_a(0) - n_{a\infty}(\sigma_0)) e^{-r_a(\sigma_0) t} + n_{a\infty}(\sigma_0) \quad (5.2.8)$$

wobei

$$n_{a\infty}(\sigma_0) = \frac{q_a(\sigma_0)}{r_a(\sigma_0)}. \quad (5.2.9)$$

die asymptotische Relaxationsquellendichte ist. Da nach (3.1.45) der Kehrwert der Relaxationszeit gleich

$$\frac{1}{\tau} = n_a(t) \nu_a e^{\beta \epsilon_a} = n_a(t) \frac{1}{\tau_0} \quad (5.2.10)$$

ist, folgt aus (5.2.1)

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_s + \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_i - \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_s \right] e^{-r_a(\sigma_0) t} . \quad (5.2.11)$$

Hierbei ist

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_i = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{\sigma_0}{2G} n_a(0) \quad (5.2.12)$$

die Kriechrate bei Beginn des Kriechversuches und

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_s = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{\sigma_0}{2G} \frac{q_a(\sigma_0)}{r_a(\sigma_0)} . \quad (5.2.13)$$

die stationäre Kriechrate. Gleichung (5.2.11) entspricht dem Ansatz von McVetty [5.4] bzw. Garofalo [5.5] zur Beschreibung der Kriechgeschwindigkeit. Nach Ilschner [5.6] beschreiben diese das Hochtemperaturkriechen (über 2/3 der Schmelztemperatur) der meisten Materialien. Die asymptotische Kriechrate ist nach Ilschner [5.6] eine Funktion der Spannung der Form

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_s = B \sigma_0^n \sinh(\beta V \sigma_0) e^{-\beta \epsilon_a} \quad (5.2.14)$$

wobei B , V und n Materialkonstanten sind. Der Faktor β ist gleich $1/kT$ und ϵ_a die Aktivierungsenergie des Relaxationsprozesses. Vor allem bei hohen Spannungen spielt der Faktor n eine entscheidende Rolle. Als Beispiel sei der Logarithmus der stationären Kriechrate von Stahl aus [5.6] in Bild 5.2.1 dargestellt.

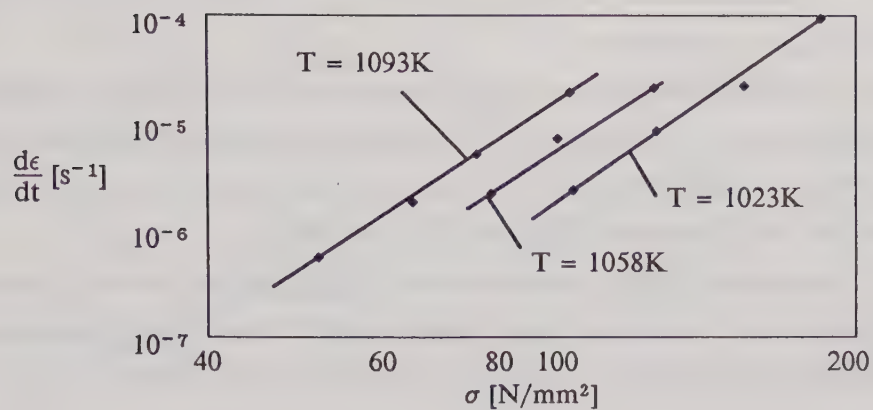


Bild 5.2.1: Stationäre Kriechrate von Stahl als Funktion der Spannung

In diesem Fall ergibt sich für n etwa 5. Auch die Temperaturabhängigkeit kann leicht in einer logarithmischen Darstellung der Versuchsergebnisse bestimmt werden. In Bild 5.2.2 ist der Logarithmus der Kriechrate als Funktion des Kehrwertes der absoluten Temperatur dargestellt.

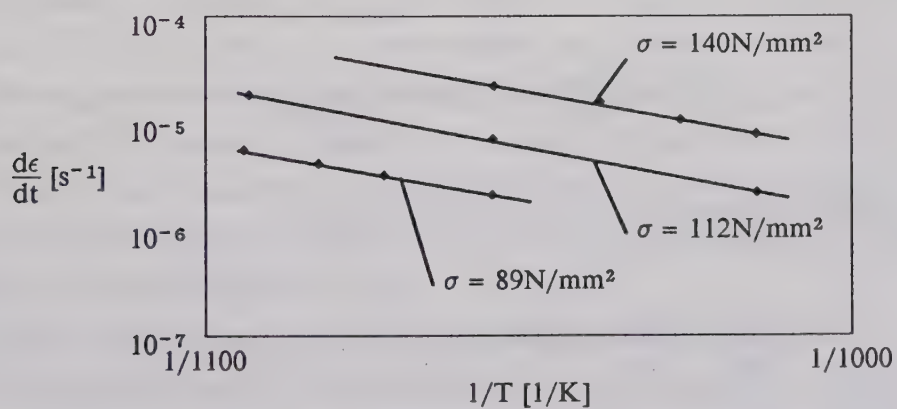


Bild 5.2.2: Kriechrate bei Stahl als Funktion des Kehrwertes der absoluten Temperatur

Die Daten wurden ebenfalls aus [5.6] entnommen. In diesem Fall ist die Aktivierungsenergie $\epsilon_a = 4.3 \times 10^{-19}$ J.

Ähnliche Spannungsabhängigkeiten der Kriechrate wie (5.2.14) darstellt, wurden z.B. von Berckhemer, Auer und Drisler [5.10] bei einigen Gesteinen beobachtet. Kriechformeln dieser Art konnten schon, wie beispielsweise Barrett und Nix [5.7] zeigten, direkt aus der "Versetzungsmechanik" berechnet werden.

Für tiefe Temperaturen bietet sich ein anderes Bild, hier sind sowohl Erzeugungsmechanismen wie Erholungsprozesse "eingefroren". Die Relaxationsquellendichte verändert sich vor allem durch "Härtungsprozesse" und (5.2.7) reduziert sich zu

$$\frac{dn_a}{dt} = - h_a(\sigma_0) n_a^2 . \quad (5.2.15)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt dann

$$n_a(t) = \frac{n_a(0)}{1 + n_a(0) h_a t} . \quad (5.2.16)$$

Aus (5.2.1) und (5.2.10) folgt die Kriechrate

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{\sigma_0}{E} n_a(0) \frac{1}{1 + n_a(0) h_a t} . \quad (5.2.17)$$

Eine weitere Integration ergibt eine äussere Verzerrung

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)_i + \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{h_a} \ln(1 + n_a(0) h_a t) . \quad (5.2.18)$$

Diese logarithmische Abhängigkeit wird bei den meisten Materialien bei Temperaturen unter einem Drittel der Schmelztemperatur beobachtet. Ein Beispiel ist im Bild 5.2.3 dargestellt. Es wurde aus [5.8] entnommen.

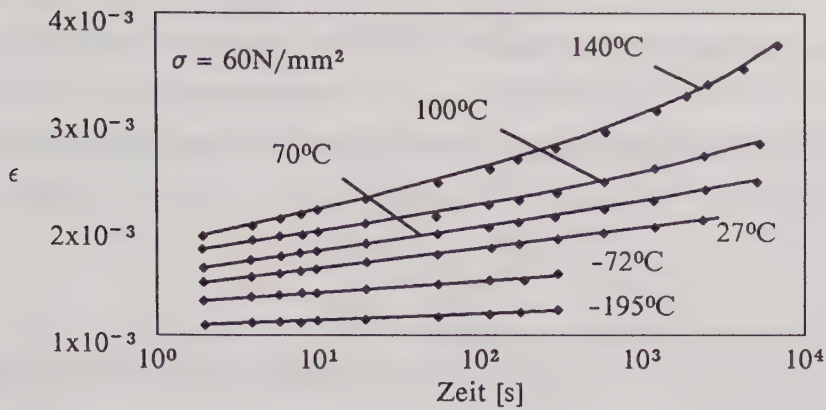


Bild 5.2.3: Logarithmisches Kriechen von Kupfer [5.8]

Auch in diesem Fall sind Arbeiten bekannt, so z.B. im Buch von Haasen [5.11], um dieses Verhalten direkt aus der Kinetik der Versetzungswanderung zu berechnen.

Der Kriechversuch zeigt sich als ideale Möglichkeit die Gleichung der Kinetik der Relaxationsquellendichte zu charakterisieren. Bei einem Hochtemperaturkriechversuch kann aus der stationären Kriechrate das Verhältniss q_a zu r_a bestimmt werden. Aus (5.2.11) folgt, dass r_a dem Kehrwert der Zeit entspricht, die das Material benötigt, um die stationäre Kriechrate zu erreichen. Der Faktor h_a kann aus dem Kriechversuch bei tiefen Temperaturen gewonnen werden. Ist das Material isochor erfolgt bei einer isotropen Verformung keine Relaxation. Die Faktoren q_a , r_a und h_a sind folglich nur von der Invariante J_2 aus (3.1.20) abhängig. Die durch den eindimensionalen Kriechversuch ermittelten Faktoren sind Funktionen der Spannung σ_0 . Durch (5.2.5) gelten diese Beziehungen auch für die Verzerrungsinvariante J_2 und somit allgemein für den dreidimensionalen Fall.

Eine etwas andere Situation ergibt sich bei Spannungsrelaxationsversuchen. In diesem Fall wird die Probe in einer Zeit viel kürzer als die Relaxationszeit elastisch bis zu einer Spannung σ_0 belastet. Die entstandene äussere Verzerrung ($\partial u / \partial z$) in der z Achse wird dann konstant gehalten. Die inneren Verzerrungen und somit die aufgebraachte Spannung, verändern sich durch das Fliessen. Die Restspannung ist dann

$$\sigma(t) = E \epsilon_{33}(t) \quad (5.2.19)$$

wobei $\epsilon_{33}(t)$ die zur Zeit t im Körper verbleibende innere Verzerrung und E der Elastizitätsmodul ist. Für homogenes Material wird die Probe gleichmässig relaxiert und somit wird die innere Verzerrung ϵ_{33} und die Spannung σ nicht von z abhängen. Ist die äussere Verzerrung konstant, dann folgt aus (5.2.1) und (5.1.11), dass

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \sigma = 0 \quad (5.2.20)$$

ist. Nach (5.2.10) ist die Relaxationszeit eine Funktion der Relaxationsquellendichte, so dass (5.2.20) gleich

$$\frac{d\sigma}{dt} = - \frac{1}{\tau'} n_a \sigma, \quad (5.2.21)$$

mit

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0}, \quad (5.2.22)$$

ist. Bei "tiefen" Temperaturen wird die Kinetik der Relaxationsquellendichte durch (5.2.15) beschrieben. Im Fall eines Spannungsrelaxationsversuches wird aber der Faktor h_a von der verbleibenden inneren Verzerrung oder Spannung abhängen. Bei kleinen Spannungen kann angenommen werden, dass der Faktor h_a eine lineare Funktion der Restspannung σ ist. Da auch in diesem Fall die Aktivierungsenergie ϵ_a eine Rolle spielt, wird h_a proportional zu $\sigma e^{\beta\epsilon_a}$ gesetzt. Da τ' die $e^{\beta\epsilon_a}$ - Abhängigkeit enthält, kann zur Vereinfachung (5.2.15) in der Form

$$\frac{dn_a}{dt} = - \frac{\gamma \sigma}{\tau'} n_a^2, \quad (5.2.23)$$

geschrieben werden, wobei γ ein Proportionalitätskoeffizient ist. Gleichung (5.2.23) kann nach n_a aufgelöst und in (5.2.21) eingesetzt werden. Es ergibt sich so die Spannungsrelaxationsgleichung

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = (1 + \gamma \sigma) \frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2. \quad (5.2.24)$$

Da die Relaxation hauptsächlich durch den Härtungsprozess stattfindet muss angenommen werden, dass $\gamma \sigma \gg 1$ ist. In diesem Fall reduziert sich (5.2.24) zu

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \gamma \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \quad (5.2.25)$$

dessen erste Integration

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{1}{1 - \gamma \frac{d\sigma(0)}{dt} t} \frac{d\sigma(0)}{dt} \quad (5.2.26)$$

ergibt. Nach (5.2.22) ist die Geschwindigkeit mit der zu Beginn die Spannung abnimmt

$$\frac{d\sigma(0)}{dt} = - \frac{1}{\tau'} n_a(0) \sigma_0 \quad (5.2.27)$$

wobei σ_0 die anfängliche Spannung ist. Eine weitere Integration von (5.2.26) ergibt mit Hilfe der Anfangsbedingung (5.2.27)

$$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} = 1 - \frac{1}{\gamma \sigma_0} \ln \left(1 + \sigma_0 \gamma n_a(0) \frac{t}{\tau'} \right). \quad (5.2.28)$$

Dies ist der charakteristische logarithmische Spannungsabfall wie man ihn z.B. bei E-Kupfer (elektrolytischem Kupfer, hohe Reinheit) beobachten kann [5.9]. Mit einer Wahl von $\epsilon_a = 1.4 \times 10^{-19}$ J, einem $\tau_0/n_a(0) = 930$ s und einem $\gamma \sigma_0$ von 17.6 ergeben sich für verschiedene Temperaturen, die im Bild 5.2.4 dargestellten Spannungsrelaxationen.

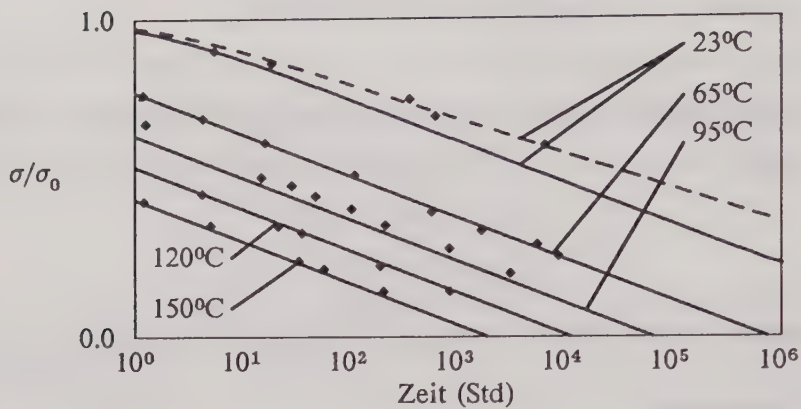


Bild 5.2.4: Spannungsrelaxation bei E-Kupfer

Die Messwerte wurden aus [5.8] entnommen. Einzig die Kurve bei 23°C zeigt eine starke Abweichung zu den Messwerten. Eine bessere Übereinstimmung kann durch eine Kurvenanpassung mit $\gamma\sigma_0 = 20.9$ und $\tau'/n_a(0) = 32$ s erzielt werden (gestrichelte Linie). Eine gleichzeitige Bestimmung von $\tau_0/n_a(0)$ und ϵ_a ist in diesem Fall nicht möglich, weil der Versuch bei einer einzigen Temperatur durchgeführt wurde. Eine Veränderung der Parameter ist im Bereich -50°C bis 50°C zu erwarten, da der Relaxationsprozess zwischen Wanderung und Ausheilung von Einzelleerstellen zugunsten von Doppelleerstellen übergeht (siehe z.B. Böhm [5.12]). Dieser zweite Mechanismus ist dann massgebend für die Relaxation bis zu Temperaturen von 250°C .

Wie aus Bild 5.2.5 ersichtlich wird, verhindert das Legieren den Relaxationsprozess. Auch diese Daten stammen von [5.4]. Die Cu-1.9-Be-Legierung zeigt eine wesentlich schwächere Spannungsrelaxation.

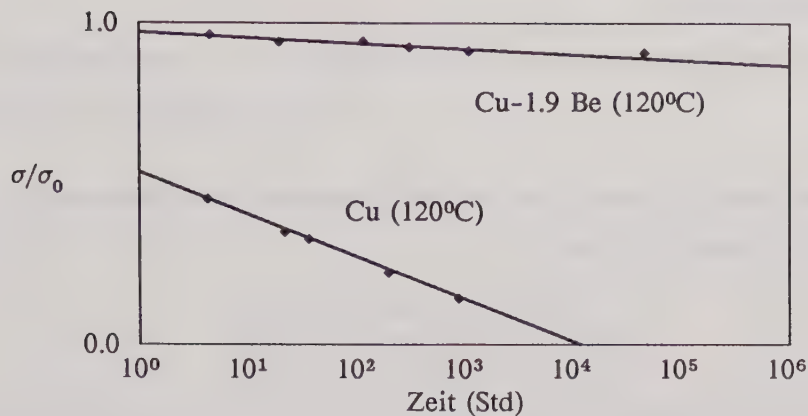


Bild 5.2.5: Spannungsrelaxation von E-Kupfer und einer Cu-1.9-Be-Legierung

Das Beispiel zeigt eine relative gute Beschreibung der Spannungsrelaxation von Kupfer. Sowohl Aktivierungsenergie ϵ_a , Relaxationszeit pro Relaxationsquelle $\tau_0/n_a(0)$ und Proportionalitätsfaktor γ zeigen kaum Temperaturabhängigkeit.

Durch die Betrachtung der Kriechversuche wurde vor allem das Modell der Kinetik der Relaxationsquellendichten diskutiert und mit dem Experiment verglichen. Bei den Spannungsrelaxationsversuchen spielt der Zusammenhang zwischen Plastizitätsgleichung und Kinetik der Relaxationsquellendichte die entscheidende Rolle. Auch hier zeigt das Modell eine gute Übereinstimmung mit den bekannten Materialverhalten. Im nächsten Abschnitt soll vor allem die Plastizitätsgleichung mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden.

5.3. Schalldämpfung

Wie im Abschnitt 5.1. gezeigt, ist die eindimensionale Wellengleichung für Longitudinalmoden in einem Stab gleich

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} \frac{\partial v_z}{\partial t} = c_0^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}. \quad (5.3.1)$$

Der zweite Term der linken Seite ist der Dämpfungsterm. Bei der Herleitung wurde angenommen, dass die Relaxationszeit zeitlich konstant ist. Da aber der Relaxationsprozess in manchen Fällen resonant angeregt werden kann, muss aber angenommen werden, dass die Relaxationszeit eine frequenzabhängige Grösse ist. Mit dieser Annahme kann folglich die Schalldämpfung durch (5.3.1) annähernd beschrieben werden. Dies entspricht auch der Betrachtung von Zener [5.13], bei der die Dämpfung als eine Funktion der Frequenz dargestellt wird. Jede Überhöhung im "Relaxationsspektrum" entspricht einer resonanten Anregung eines Relaxationsprozesses. Ein schematisches "Relaxationsspektrum" wurde aus dem Buch von Lazan [5.7] entnommen und ist im Bild 5.3.1 dargestellt.

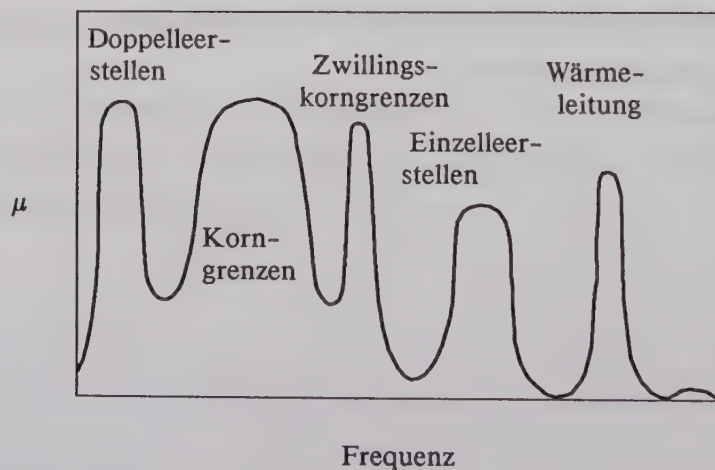


Bild 5.3.1: Schematische Darstellung eines Relaxationsspektrums (aus [5.7]) und Angabe der Art der Inhomogenität, die zur stärkeren Dämpfung führt

Ist k der Wellenzahlvektor, ω die Winkelfrequenz und v_0 die Amplitude der Schwingung, dann hat die Lösung die Form

$$v_z(z,t) = v_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (5.3.2)$$

falls

$$\omega^2 + \frac{2(1+\nu)}{3\tau} i\omega = c_0^2 k^2 \quad (5.3.3)$$

ist. Gleichung (5.3.3) ist die Dispersionsrelation der Wellengleichung (5.3.1) und wird durch Einsetzen von (5.3.2) in (5.3.1) erhalten. Im Fall einer periodischen Anregung ist die Winkelfrequenz reell. Folglich muss der Wellenzahlvektor komplex sein. Die zwei Wurzeln dieser quadratischen Gleichung in k sind

$$k = \pm \left[\frac{\omega}{c(\omega)} + i \mu(\omega) \right] \quad (5.3.4)$$

mit

$$c(\omega) = \frac{c_0}{\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2}} \quad (5.3.5)$$

$$\mu(\omega) = \frac{\omega}{c_0 \sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2} \quad (5.3.6)$$

und

$$\omega_0 = \frac{2(1+\nu)}{3\tau(\omega)}. \quad (5.3.7)$$

Die Grösse $c(\omega)$ entspricht einer Schallgeschwindigkeit und $\mu(\omega)$ einer Dämpfung. ω_0 ist eine von der Relaxationszeit abhängige kritische Winkelfrequenz. Für $\omega \gg \omega_0$ ist die Periode der Schwingung viel kürzer als die Relaxationszeit. In diesem Fall lassen sich (5.3.5) und (5.3.6) in ω_0/ω entwickeln. Es folgt somit bis in quadratischer

Näherung

$$c(\omega) = c_0 \left[1 - \frac{1}{2^3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + O(\omega_0^4/\omega^4) \right] \quad (5.3.8)$$

und

$$\mu(\omega) = \frac{\omega_0}{2c_0} \left[1 - \frac{1}{2^3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + O(\omega_0^4/\omega^4) \right] \quad (5.3.9)$$

In diesem Fall ist folglich die Schallgeschwindigkeit in erster Näherung frequenzunabhängig. Die Dämpfung hängt in dieser Näherung nur über die Relaxationszeit von der Frequenz ab. In derselben Ordnung ist der Wellenzahlvektor

$$k = \pm \frac{1}{c_0} \left[\omega \left(1 + \frac{1}{2^3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + i \frac{\omega_0}{2} \left(1 - \frac{1}{2^3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] + O(\omega_0^4/\omega^4) . \quad (5.3.10)$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteil des Wellenzahlvektors, so stellt man fest, dass die Schwingung nur eine kleine Dämpfung zeigt. Im umgekehrten Grenzfall sehr langer Perioden der Schwingung verglichen mit der Relaxationszeit ($\omega \ll \omega_0$) ergibt die Schallgeschwindigkeit

$$c(\omega) = c_0 \sqrt{2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \right] + O(\omega^{5/2}/\omega_0^{5/2}) \quad (5.3.11)$$

und die Dämpfung

$$\mu(\omega) = \frac{1}{c_0 \sqrt{2}} (\omega \omega_0)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \right] + O(\omega^{5/2}/\omega_0^{5/2}) . \quad (5.3.12)$$

Beide Grössen sind in dieser Annäherung eine Funktion der Wurzel der Winkelfrequenz. Real- und Imaginärteil des Wellenvektors sind hier von derselben Grössenordnung. Die Dämpfung wird sich folglich in diesem Fall stark bemerkbar machen. Wird ein Stab der Länge ℓ an einem Ende mit einer Frequenz ω und einer Ampli-

tude v_0 angeregt, dann muss die Lösung $v_z(z,t)$ die Randbedingung

$$v_z(0,t) = v_0 e^{i\omega t} \quad (5.3.13)$$

erfüllen. Ist das andere Ende frei, so ist an dieser Stelle die Verzerrungskomponente ϵ_{33} zu allen Zeiten gleich Null. Aus Gleichung (5.1.12) folgt so die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z=\ell} = 0 \quad (5.3.14)$$

Mit (5.3.4) lautet der Lösungsansatz (5.3.2)

$$v_z(z,t) = A e^{-\mu z} e^{i(\omega z/c - \omega t)} + B e^{\mu z} e^{i(-\omega z/c - \omega t)} \quad (5.3.15)$$

wobei A und B von den Randbedingungen abhängige Konstanten sind. Setzt man diesen Lösungsansatz in die Randbedingungen (5.3.13) und (5.3.14) ein, erhält man für die Konstanten A und B die Ausdrücke

$$A = \frac{v_0}{2} \frac{e^{2\mu\ell} + e^{-i2\omega\ell/c}}{\cosh(2\mu\ell) + \cos(2\omega\ell/c)} \quad (5.3.16)$$

und

$$B = \frac{v_0}{2} \frac{e^{i2\omega\ell/c} + e^{-2\mu\ell}}{\cosh(2\mu\ell) + \cos(2\omega\ell/c)} \quad (5.3.17)$$

Führt man diese Ausdrücke in den Lösungsansatz (5.3.15) ein, dann folgt

$$v_z(z,t) = v_0 \Phi(z,\omega) e^{-i\omega t} \quad (5.3.18)$$

mit

$$\Phi(z,\omega) = \frac{\cos(\omega(2\ell-z)/c) \cosh((2\ell-z)\mu)}{\cosh(2\mu\ell) + \cos(2\omega\ell/c)} - i \frac{\sin(\omega(2\ell-z)/c) \sinh((2\ell-z)\mu)}{\cosh(2\mu\ell) + \cos(2\omega\ell/c)} \quad (5.3.19)$$

Die Übertragungsfunktion ist definiert durch das Verhältnis der Amplituden an

beiden Stabenden. In diesem Fall ist dies

$$D(\omega) = \frac{v_z(\ell, \omega)}{v_z(0, \omega)} = \Phi(\ell, \omega) . \quad (5.3.20)$$

Das Quadrat des Betrags der Übertragungsfunktion ist dann nach Gleichung (5.3.19) gleich

$$|D(\omega)|^2 = \frac{1}{\cosh^2(\mu\ell) + \cos^2(\omega\ell/c) - 1} . \quad (5.3.21)$$

Bild 5.3.1 zeigt $|D(\omega)|^2$ als Funktion des Verhältnisses $\omega\ell/c_0$ für verschiedene Werte von $\omega_0\ell/c_0$.

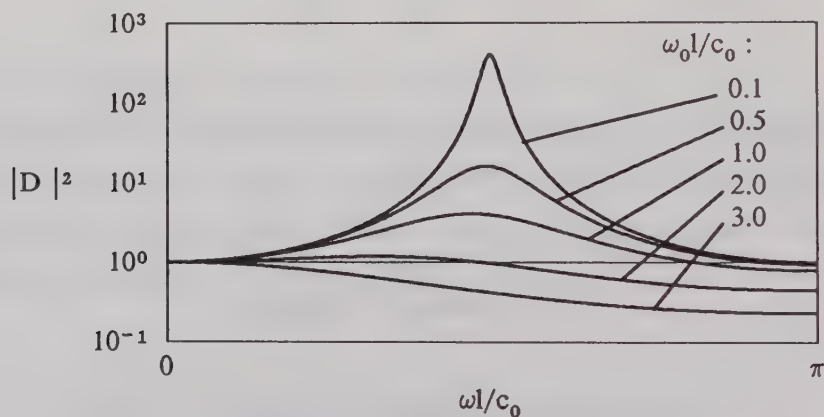


Bild 5.3.2: Quadrat des Betrags der Übertragungsfunktion

Im Grenzfall schwacher Dämpfung ($\mu\ell \ll 1$ bzw. $\omega_0\ell \ll c_0$) ist das Maximum von $|D(\omega)|^2$ bei

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2\ell} \quad n=1,2,3,\dots \quad (5.3.22)$$

Entwickelt man $|D(\omega)|^2$ um diese Maxima, so folgt, dass

$$|D(\omega)|^2 = \frac{1}{\ell^2 \left[\mu^2 + \frac{(\omega - \omega_n)^2}{c_0^2} \right]} \quad (5.3.23)$$

ist. Bei einer Frequenz von

$$\omega_{\pm 1/2} = \omega_n \pm c_0 \mu \quad (5.3.24)$$

reduziert sich $|D(\omega)|^2$ zur Hälfte des Maximalwertes.

Mit diesen beiden Frequenzen kann die Breite $\Delta\omega$ der Resonanzspitze durch

$$\Delta\omega = \omega_{+1/2} - \omega_{-1/2} = 2c_0\mu = \omega_0 \quad (5.3.25)$$

definiert werden. Folglich ist nach (5.3.7) $\Delta\omega$ ein Mass für die Relaxationszeit $\tau(\omega)$.

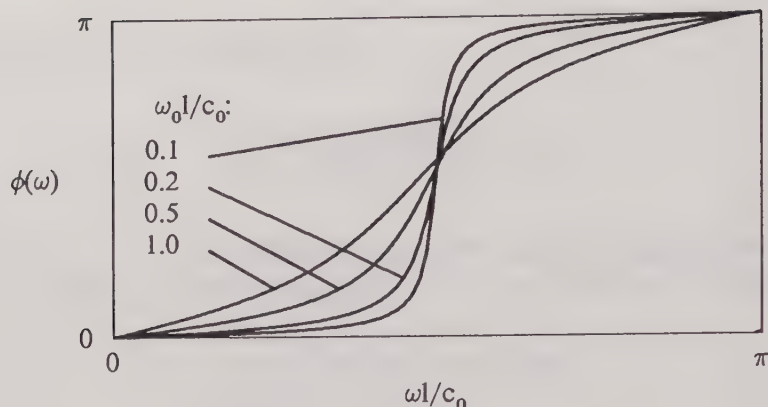
Die Phasenverschiebung kann aus dem Verhältnis des Imaginär- und Realteiles der Übertragungsfunktion durch

$$\phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\text{Im}(D(\omega))}{\text{Re}(D(\omega))} \right] \quad (5.3.26)$$

berechnet werden. In diesem Fall ergibt sich aus (5.3.21)

$$\phi(\omega) = - \arctan (\tan(\omega\ell/c) \tanh(\ell\mu)) . \quad (5.3.27)$$

Die Phasenverschiebung ist in Bild 5.3.2 als Funktion von $\omega\ell/c_0$ für verschiedene $\omega_0\ell/c_0$ dargestellt.

Bild 5.3.3: Phasenverschiebung als Funktion von $\omega l/c_0$

Im Grenzfall vernachlässigbarer Dämpfung ändert sich die Phasenverschiebung sprunghaft mit der Winkelfrequenz. Im allgemeinen erfolgt bei höherer Dämpfung eine langsamere Änderung der Phasenverschiebung.

Die Übertragungsfunktion (5.3.21) muss für eine Vielzahl an Materialien gelten. Um diese Aussage genauer zu betrachten, führten wir in unserem Akustiklabor Messungen an einer Vielzahl von Stäben aus unterschiedlichen Materialien durch. Zur Messung der Übertragungsfunktion wurde der Stab auf einen Schwingtisch oder Shaker befestigt. Die Anregung des Shakers erfolgt mit Hilfe eines Rauschgenerators (White Noise) und einem Leistungsverstärker. Das Signal zur Bestimmung der Übertragungsfunktion wird mittels zweier Beschleunigungsaufnehmer mit Hilfe entsprechender Ladungsverstärkern gemessen. Einer der beiden wird am Tisch des Shakers neben dem Stab, der andere am freien Ende des Stabes geklebt. Beide Signale werden mit einer Signalanalyseanlage digitalisiert und fouriertransformiert. Aus der Mittelung der Kreuzkorrelationen und den Spektren der Signale lässt sich, wie in [5.15] und [5.16] beschrieben, die Übertragungsfunktion bestimmen. Die Messkette ist im Bild 5.3.4 prinzipiell dargestellt.

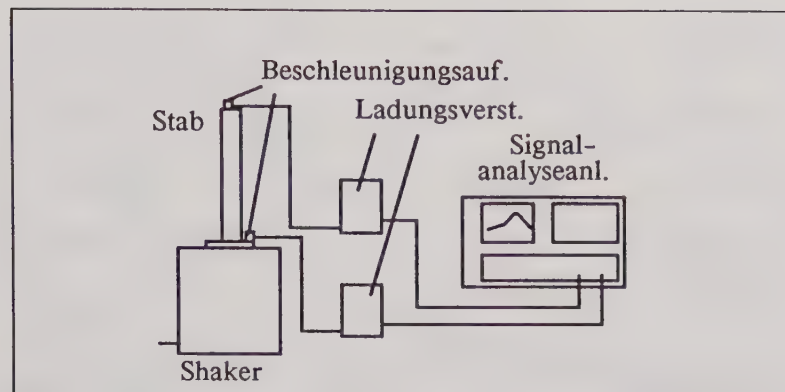


Bild 5.3.4: Messkette zur Bestimmung der Übertragungsfunktion

Im folgenden sind nur einige Beispiele graphisch dargestellt. Die gestrichelte Kurve entspricht der durch Anpassung des Dämpfungsfaktors μ erhaltene Übertragungsfunktion (5.3.9). In diesem Fall ist die betrachtete Eigenfrequenz immer ω_1 ($n = 1$).

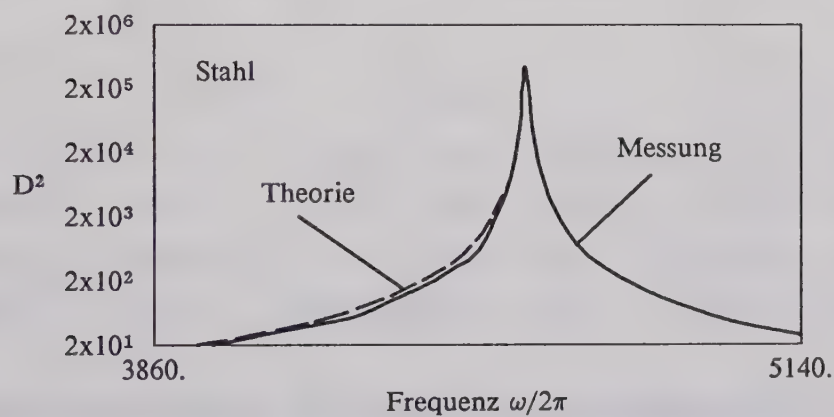


Bild 5.3.5: Übertragungsfunktion eines Stahl-Stabes einer Länge von 275 mm und einem Durchmesser von 20 mm.

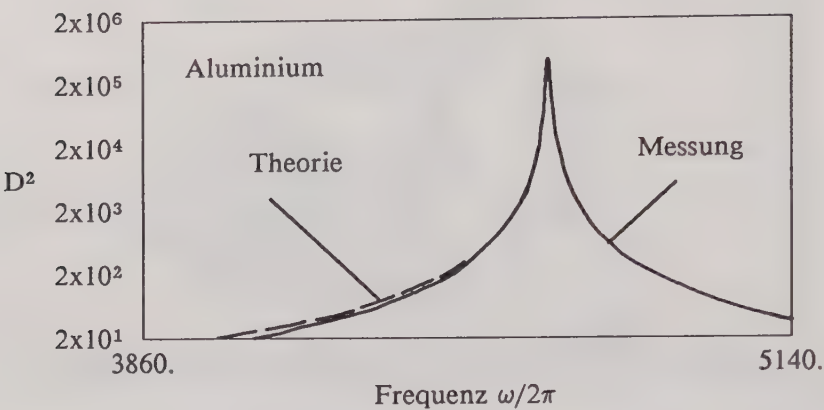


Bild 5.3.6: Übertragungsfunktion eines Aluminium-Stabes einer Länge von 274 mm und einem Durchmesser von 20 mm.

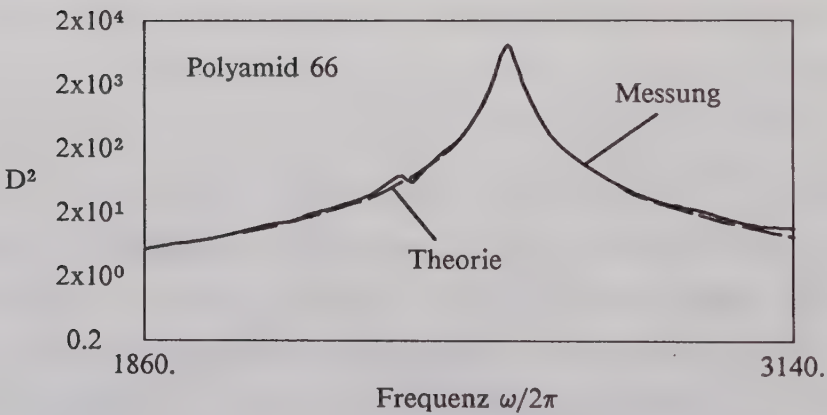


Bild 5.3.7: Übertragungsfunktion eines Polyamid 66 (glasfaserverstärkt) Kunststoff-stabes einer Länge von 200 mm und einem Durchmesser von 20 mm.

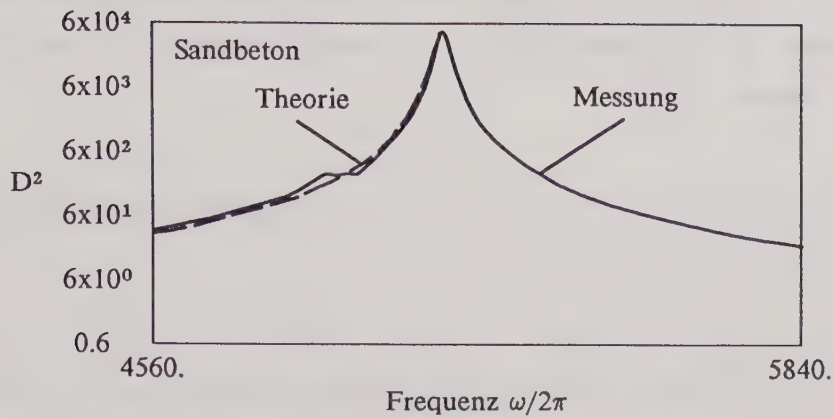


Bild 5.3.8: Übertragungsfunktion eines Sandbetonstabes einer Länge von 198 mm und einem Durchmesser von 20 mm.

Die entsprechenden Werte für die theoretische Übertragungsfunktion sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Material	c_0 [m/s]	ν	μ [1/m]	$\tau(\omega)$ [s]
Stahl	5051 ± 5	0.28	0.0050 ± 0.0001	0.0169 ± 0.0004
Aluminium	5109 ± 5	0.34	0.0050 ± 0.0001	0.0175 ± 0.0004
Kunststoff	2060 ± 5	0.45	0.055 ± 0.001	0.00427 ± 0.00008
Sandbeton	4061 ± 5	0.25	0.023 ± 0.001	0.0045 ± 0.0002

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung ist sehr gut. Die im Bild 5.3.7 und 5.3.8 in der Messung auftretende kleine zweite Spitze entspricht einer Biegemode die resonant angeregt wird. Es muss erwähnt werden, dass keine Versuche unternommen worden sind, das Relaxationsspektrum $\tau(\omega)$ aus der Gleichung für die Kinetik der Relaxationsquellendichte herzuleiten. Für gegebene Faktoren q_a , r_a und h_a als Funktion der Spannung oder Verzerrung sollte dies aber möglich sein. In diesem Kapitel wurde vor allem untersucht, wie das Modell bekannte Material-

verhalten beschreibt. Dieses zeigt aber auch interessante Lösungen im Bereich der Hydrodynamik und der Bruchdynamik. Diese Ansätze sind erste Hinweise auf andere Möglichkeiten, die das Modell eröffnet. Sie müssen in späteren Arbeiten eingehend diskutiert werden.

6. Folgerungen aus dem Modell

Im Kapitel 5. wurden Materialeigenschaften wie Kriechen, Spannungsrelaxation und Dämpfung mit dem Modell beschrieben. Das Modell aber zeigt zwei neue Aspekte, die unter Umständen interessante physikalische Vorgänge beschreiben. So wird im Abschnitt 6.1. mit einer linearen Stabilitätsanalyse gezeigt, dass eine laminare Rohrströmung instabil werden kann. Dies ist der Fall, wenn sich die äussere Verzerung strömungsbedingt schneller ändert als durch den Relaxationsprozess die Flüssigkeit "fliessfähig" erhalten werden kann. Es ist denkbar, dass dieses Verhalten im Zusammenhang mit dem laminar-turbulent Übergang steht. Ein weiterer interessanter Aspekt ist die Möglichkeit, dass im Bereich einer Inhomogenität im Material der Relaxationsprozess genügend Wärme freisetzt, um eine lokale Aufschmelzung zu verursachen. Da Rissspitzen solche Inhomogenitäten darstellen, könnte der Relaxationsprozess einen direkten Einfluss auf den Risswachstum haben. Die Auswirkungen dieser "Hot Spots" auf das Verhalten des Festkörpers wird im Abschnitt 6.2. diskutiert.

Die Untersuchungen zur Instabilität der Strömung, wie zur Rissdynamik, sollen in nachfolgenden Arbeiten weiter vertieft werden.

6.1. Die nichtlineare Strömungsgleichung

Im Kapitel 4. wurde für den Fall konstanter Relaxationszeiten die "allgemeine Strömungsgleichung" (4.1.11) hergeleitet. Wird diese Gleichung mit dem Faktor $e^{t/\tau}$ multipliziert und nach der Zeit abgeleitet, folgt mit den Definitionen (4.1.12) bis (4.1.14) für $v \ll c_{l,t}$

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right] + \frac{1}{\tau} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\kappa\tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \rho_0 c_t^2 \nabla^2 \vec{v} + \rho_0 (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) . \quad (6.1.1)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (3.2.8) lässt sich diese Gleichung zu

$$\rho \left[\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{1}{\kappa\tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \rho_0 c_t^2 \nabla^2 \vec{v} + \rho_0 (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (6.1.2)$$

umformen. Gleichung (6.1.2) stellt die nichtlineare Strömungsgleichung dar. Die totale Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}$ nach der Zeit ist gleich

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (6.1.3)$$

Sie entspricht physikalisch der von einem mitströmenden Beobachter festgestellte Beschleunigung der Strömung. Die partielle Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit dagegen, entspricht der von einem festen Raumpunkt beobachtete Beschleunigung der Strömung.

Gleichung (6.1.3) enthält zwar eine Nichtlinearität, diese ist aber vom gewählten Koordinatensystem abhängig und somit nur bedingt von physikalischem Interesse. In einem mitströmenden Koordinatensystem ist diese Nichtlinearität nicht vorhanden.

Wie aber im Abschnitt 4.3 gezeigt, ist in linearer Näherung, die Verformungsgleichung bzw. Strömungsgleichung immer stabil. Der nichtlineare Term in der Strömungsgleichung (6.1.2) ist dagegen physikalisch bedeutend. Er ist in einem mitströmenden Koordinatensystem nicht notwendigerweise Null. Seine Bedeutung für die Stabilität der Strömung soll an dieser Stelle in einfacher Form gezeigt werden.

Im Fall einer stationären Strömung, bei der die partielle Ableitung der Geschwindigkeit und Dichte nach der Zeit verschwindet, reduziert sich die Strömungsgleichung (6.1.2) zu

$$\begin{aligned} \rho \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \right] \\ = \frac{1}{\rho_0 \kappa \tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + c_t^2 \nabla^2 \vec{v} + (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

und die Kontinuitätsgleichung (3.2.8) zu

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.1.5)$$

Führt man eine zeitabhängige Störung in der Geschwindigkeit $\delta \vec{v}$ und Dichte $\delta \rho$ ein, dann sind in linearer Näherung $\vec{v} + \delta \vec{v}$ und $\rho + \delta \rho$ Lösungen der Strömungsgleichung (6.1.2) und der Kontinuitätsgleichung (3.2.8) wenn

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{d^2 \delta \vec{v}}{dt^2} + \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \frac{d \delta \vec{v}}{dt} - (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}) \frac{d \vec{v}}{dt} \right] \\ + \delta \rho \left[\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} + \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \frac{d \vec{v}}{dt} \right] \\ = \frac{1}{\kappa \tau} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{u}) + \rho_0 c_t^2 \nabla^2 \delta \vec{v} + \rho_0 (c_l^2 - c_t^2) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v}) \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

und

$$\frac{d \delta \rho}{dt} = - \delta \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \rho \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} \quad (6.1.7)$$

erfüllt ist. Sei die von der Störung verursachte Verschiebung durch

$$\vec{\delta u}(\vec{x}, t) = \vec{\delta u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (6.1.8)$$

gegeben, wobei $\vec{\delta u}_0$ die Amplitude, $\vec{k}$ der Wellenzahlvektor und ω die Winkelfrequenz ist. Analog kann die Störung der Dichte durch

$$\delta \rho(\vec{x}, t) = \delta \rho_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (6.1.9)$$

dargestellt werden. Aus (6.1.8) folgt in linearer Näherung aus (6.1.3) für die Störung der Strömungsgeschwindigkeit

$$\vec{v} \simeq \frac{\partial \vec{\delta u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\delta u} = -i(\omega - (\vec{k} \cdot \vec{v})) \vec{\delta u} . \quad (6.1.10)$$

Betrachtet man nur transversale Störungen, so dass

$$\vec{k} \cdot \vec{\delta u}_0 = 0 \quad (6.1.11)$$

ist, und ist im Bereich der Störung

$$\vec{\delta u}_0 \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{k} \cdot \vec{v} = 0 , \quad (6.1.12)$$

dann reduziert sich (6.1.6) und (6.1.7) durch Einführen von (6.1.8) und (6.1.9) zu Dispersionsrelation

$$\omega \left[\omega^2 + i \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \omega - \frac{\rho_0}{\rho} c_t^2 k^2 \right] = 0 . \quad (6.1.13)$$

Geht man davon aus, dass die Lösung mit $\omega = 0$ nicht von Interesse ist, sind die Wurzeln aus (6.1.13) gleich

$$\omega_{\pm} = -\frac{i}{2} \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] \pm \left[\frac{\rho_0}{\rho} c_t^2 k^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\tau} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (6.1.14)$$

Mit der Definition (4.2.3) für den Druck ist die Divergenz der Geschwindigkeit gleich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\kappa \frac{dp}{dt}, \quad (6.1.15)$$

wo κ die Kompressibilität ist. Führt man (6.1.15) in (6.1.14) ein, so folgt

$$\omega_{\pm} = -\frac{i}{2} \left[\frac{1}{\tau} + \kappa \frac{dp}{dt} \right] \pm \left[\frac{\rho_0}{\rho} c_t^2 k^2 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\tau} + \kappa \frac{dp}{dt} \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (6.1.16)$$

Solang

$$\frac{1}{\tau} > -\kappa \frac{dp}{dt} \quad (6.1.17)$$

bleibt, ist die Lösung der Strömungsgleichung für alle $\vec{k}$ eine gedämpfte Schwingung. Im Fall

$$\frac{1}{\tau} < -\kappa \frac{dp}{dt} \quad (6.1.18)$$

sind dagegen beide Lösungen divergent. Die Strömung ist instabil. Die Grösse dp/dt ist die vom mitströmenden Beobachter gemessene Druckänderung. Im Fall einer stationären Rohrströmung kann die Druckänderung dp/dt abgeschätzt werden. In der linearen Näherung ergibt (6.1.4) die klassische Hagen-Poiseuille (siehe z.B. [4.3] oder [4.4]) Rohrströmung. Für ein Rohr der Länge $\Delta\ell$, Radius R und Druckdifferenz zwischen beiden Rohrenden Δp ist die radiale Verteilung der Geschwindigkeiten in Richtung der Rohrachse [4.7]

$$v_0(r) = v_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (6.1.19)$$

mit

$$v_m = \frac{\Delta p R^2}{4\eta \Delta \ell} . \quad (6.1.20)$$

wobei die Definition der Viskosität (4.2.7) eingesetzt wurde. Die Grösse v_m ist dabei die maximale Geschwindigkeit, die die Strömung in der Mitte des Kanals erreicht. Die zeitliche Änderung des Druckes ergibt sich dann aus (6.1.15), (6.1.19) und (6.1.20) zu

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} v_m \frac{2r}{R^2} . \quad (6.1.21)$$

Die stationäre Hagen-Poiseuille Lösung wird folglich nach (6.1.18) bei

$$\frac{1}{2} \frac{R}{\tau} < v_m \quad (6.1.22)$$

instabil. R/τ spielt die Rolle einer Geschwindigkeit mit der die Relaxation über den Querschnitt stattfindet. Ist die Geschwindigkeit der Strömung schneller als die des Relaxationsprozesses, wird die stationäre Lösung instabil. Ob diese Instabilität im Zusammenhang mit dem Übergang laminar-turbulent steht soll in einer späteren Arbeit betrachtet werden.

6.2. Das Bruchverhalten

Wie schon im Abschnitt 4.1. dargestellt, führt der Relaxationsmechanismus zu einem Verlust an elastischer Verformungsenergie. Nach Abschnitt 5.2. (Bild 5.2.3) ist beispielsweise für Kupfer bei Zimmertemperatur unter einer Spannung von 60 N/mm^2 nach 10 s Kriechversuch eine Kriechrate von 10^{-3} s^{-1} zu beobachten. Demnach ist nach (5.2.1) die Relaxationszeit von der Grössenordnung 1 s und nach (4.1.18) die Wärmeleistung etwa 10^4 J/m^3 was zu einer vernachlässigbar kleinen Erwärmung führt. Dies hat zur Folge, dass für homogene Materialien die Erwärmung durch den Relaxationsprozess vernachlässigt werden kann. Dies gilt aber nicht in der Umgebung einer Inhomogenität, wo lokale Spannungsmaxima auftreten und so zu einer lokalen Erwärmung führen können. Abhängig von der Wärmeleitfähigkeit des Materials kann diese Erwärmung zu einer lokalen Schmelzung des Materials führen. Wann dies möglich ist, kann aus (4.1.29) berechnet werden. Im stationären Fall ergibt (4.1.29) für ein isochores Material mit einer Inhomogenität

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\lambda} \frac{4\pi}{3} r_0^3 \theta(r_0-r) \frac{2G}{\tau} J_2, \quad (6.2.1)$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und r_0 der Radius der Inhomogenität ist. Die Grösse J_2 entspricht der im Bereich der Inhomogenität überhöhten Invariante der inneren Verzerrung (3.1.21). Wie im Abschnitt 5.2 dargestellt, ist die Relaxationszeit τ eine von der Temperatur abhängige Funktion. Wird dies aber vernachlässigt, entspricht (6.2.1) formal der Poisson-Gleichung des elektrostatischen Potentials einer geladenen Kugel. Es ergibt sich, in Analogie zum elektrostatischen Fall, die radiale Temperaturverteilung

$$T(r) = T_0 + \frac{(4\pi)^2}{3\lambda} r_0^3 \frac{2G}{\tau} J_2 \frac{1}{r} \quad (6.2.2)$$

für r grösser als r_0 . Die Grösse T_0 stellt die Umgebungstemperatur des homogenen Materials dar. Erfolgt eine einachsige Beanspruchung mit einer Spannung σ , so ist nach der Spannungs-Verzerrungsrelation (4.1.2)

$$J_2 = \gamma_g \sigma_0^2, \quad (6.2.3)$$

wobei γ_g ein von der Geometrie abhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Beim Erreichen einer kritischen Spannung wird folglich nach (6.2.2) die Temperatur am Rand des Inhomogenitätsbereiches die Schmelztemperatur erreichen. Nach (6.2.2) und (6.2.3) ist dies bei einer Spannung

$$\sigma_{0\text{krit}}^2 = \frac{3\lambda(T_s - T_0)}{(4\pi r_0)^2} \frac{\tau}{2G\gamma_g} \quad (6.2.4)$$

der Fall. Die Grösse T_s entspricht hier der Schmelztemperatur. Ein spezielles Beispiel einer Inhomogenität bilden Risse und Mikrorisse im Material. Auch hier wird häufig ein Schwellwert, wie in (6.2.4) für den beschriebenen Fall darstellt, beobachtet. Wie sich aber diese Überlegungen auf die Beschreibung der Rissfortpflanzung auswirkt, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden.

Das Spannungsfeld um eine Risspitze hängt vom Krümmungsradius r_0 der Risspitze und von der Risslänge $2a$ ab. Nach der klassischen Bruchmechanik (siehe z.B. [6.1] bis [6.4]) ist die Spannungsverteilung für eine zur Rissebene senkrechte Spannung σ_0 in der unmittelbaren Umgebung der Risspitze eines halbinendlichen Risses durch

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{r_0}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.2.5)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_0 \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{r_0}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.2.6)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_0 \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{r_0}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.2.7)$$

gegeben. Die Koordinaten r und θ sowie die Parameter a und r_0 sind in Bild 6.2.1 definiert.

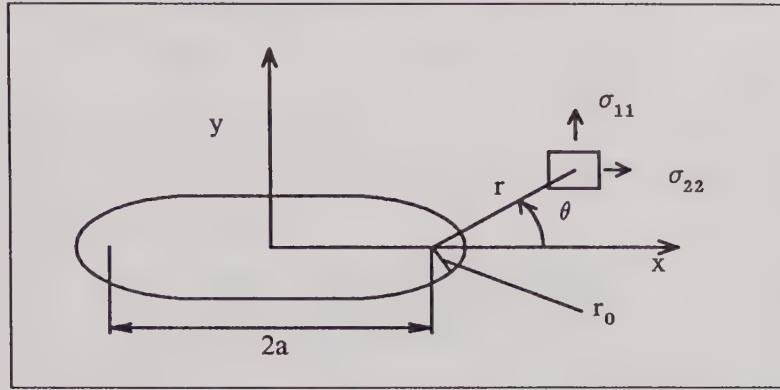


Bild 6.2.1: Der Riss

Aus der Umkehrung der Spannungs-Verzerrungsrelationen (4.1.2)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (6.2.8)$$

folgen mit Hilfe der Spannungskomponenten (6.2.5) bis (6.2.7) die inneren Verzerrungskomponenten

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{r_0}{r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.2.9)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{r_0}{r} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (6.2.10)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{\sigma_0}{2G} \left(\frac{a}{2r} \right)^{1/2} \left[\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{1}{2} \frac{r_0}{r} \sin \frac{3\theta}{2} \right]. \quad (6.2.11)$$

Durch den Relaxationsprozess wird nach (4.1.15) die Wärmeleistung

$$\frac{dU_{\text{rel}}}{dt} = dV \frac{2G}{\tau} \left[\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^2 \right] \quad (6.2.12)$$

betragen. Setzt man (6.2.9) bis (6.2.11) in (6.2.12) ein, so folgt, dass die Wärmeleistung gleich

$$\frac{dU_{\text{rel}}}{dt} = dV \frac{\sigma_0^2}{G\tau} \frac{a}{r} \left[f(\theta) + \frac{r_0^2}{r^2} \right] \quad (6.2.13)$$

mit

$$f(\theta) = \frac{1}{2^3} \left[\frac{2(1-\nu)^2}{3(1+\nu)^2} (1 + \cos\theta) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \right] \quad (6.2.14)$$

ist. In der klassischen Bruchmechanik entspricht r_0 dem Krümmungsradius der Rissspitze. Wenn der Relaxationsmechanismus durch einen lokalen Schmelzvorgang ein Risswachstum verursacht, entspricht r_0 dem Bereich, in dem das Material durch Schmelzen keine Last tragen kann. Die Fläche $r = r_0$ grenzt das geschmolzene Material gegenüber dem ungeschmolzenen ab. Wegen der radialen Abhängigkeit der Wärmeleistung in (6.2.13) kann angenommen werden, dass die Temperaturverteilung um den Schmelzbereich die Form

$$T(r) = T_0 + \Delta T_s \frac{r_0}{r} \quad (6.2.15)$$

hat. Die Grösse ΔT_s stellt dabei die Temperaturdifferenz zwischen der Schmelztemperatur T_s und der Umgebungstemperatur T_0 des Materials dar.

In einer Zeit δt_0 wird in einem Randbereich der Dicke δr um die Schmelzzone nach (6.2.13) pro Risslänge die Wärme

$$2\pi r_0 \delta r \frac{\sigma_0^2}{G\tau} \frac{a}{r_0} (1 + f(\theta)) \delta t_0 \quad (6.2.16)$$

entstehen. Durch Wärmeleitung wird nach (6.2.15) in derselben Zeit ein Wärmeverlust pro Risslänge

$$2\pi r_0 \delta r \lambda \nabla^2 T \delta t_0 = 2\pi r_0 \delta r \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0^2} \delta t_0 \quad (6.2.17)$$

eintreten. Ist c die spezifische Wärmekapazität des Materials, benötigt man nach (6.2.15) eine Energie pro Risslänge

$$2\pi r_0 \delta r \rho c \Delta T_s \frac{\delta r}{r_0} \quad (6.2.18)$$

um den Randbereich der Breite δr auf die Schmelztemperatur zu erwärmen. Ist δt_0 die Zeit innerhalb der der Randbereich die Schmelztemperatur erreicht, dann folgt aus (6.2.16) bis (6.2.18)

$$\frac{\sigma_0^2}{Gr} \frac{a}{r_0} (1 + f(\theta)) \delta t_0 - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0^2} \delta t_0 = \rho c \Delta T_s \frac{\delta r}{r_0} \quad (6.2.19)$$

oder nach δt_0 aufgelöst

$$\delta t_0 = \frac{\rho c \Delta T_s}{\frac{\sigma_0^2}{Gr} a (1 + f(\theta)) - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0}} \delta r. \quad (6.2.20)$$

Ist ℓ die spezifische latente Wärme, dann muss zur Schmelzung des Randbereiches eine Energie pro Risslänge

$$2\pi r_0 \delta r \rho \ell \quad (6.2.21)$$

aufgebracht werden. Da beim Erreichen der Schmelztemperatur kein Temperaturgradient einen Wärmefluss erlaubt, wird durch die Relaxation nach einer Zeit

$$t_s = \rho \ell \frac{G\tau}{\sigma_0^2} \frac{r_0}{a} \frac{1}{1 + f(\theta)} \quad (6.2.22)$$

der Randbereich vollständig schmelzen. Wird diese Gleichung nach r_0 aufgelöst, stellt man fest, dass der Ausdruck

$$v_s = \frac{\sigma_0^2}{G\tau} \frac{a}{\rho\ell} (1 + f(\theta)) \quad (6.2.23)$$

der Geschwindigkeit entspricht, mit der die "Schmelzfront" nach aussen wandern würde, falls sich das Material bereits auf Schmelztemperatur befindet. Die Zeit δt_s , in der der Randbereich δr schmilzt, ist folglich

$$\delta t_s = \frac{1}{v_s} \delta r = \frac{G\tau}{\sigma_0^2} \frac{\rho\ell}{a} \frac{1}{1 + f(\theta)} \delta r. \quad (6.2.24)$$

Die Zeit, innerhalb der der Radius des Randbereiches sich um δr ändert, ergibt sich aus der Summe der Zeiten δt_0 und δt_s . Aus (6.2.20) und (6.2.24) folgt, dass

$$\delta t = \delta t_0 + \delta t_s = \left[\frac{\rho c \Delta T_s}{\frac{\sigma_0^2}{G\tau} a (1 + f(\theta)) - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0}} + \frac{G\tau}{\sigma_0^2} \frac{\rho\ell}{a} \frac{1}{1 + f(\theta)} \right] \delta r \quad (6.2.25)$$

ist. Die Geschwindigkeit, mit der der Schmelzbereich wächst, ergibt sich dann aus (6.2.25) zu

$$v = \frac{\delta r}{\delta t} = \frac{\frac{\sigma_0^2}{G\tau} a (1 + f(\theta)) - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0}}{\rho c \Delta T_s + \rho\ell - \rho\ell \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0} \frac{G\tau}{\sigma_0^2} \frac{1}{a} \frac{1}{1 + f(\theta)}}. \quad (6.2.26)$$

Der Schmelzbereich dehnt sich folglich dann aus, wenn die durch Relaxation erzeugte Wärme grösser ist als der durch Wärmeleitung entstandene Verlust. Im ge-

genteiligen Fall reduziert sich der Schmelzbereich durch Abkühlung. Um das Risswachstum zu diskutieren, interessiert vor allem der Fall, bei dem die Relaxationsenergie in derselben Größenordnung wie der Wärmeverlust durch Wärmeleitung ist. In diesem Fall sind die beiden letzten Terme des Nenners von (6.2.36) im Vergleich zum ersten Term vernachlässigbar klein. So reduziert sich die Geschwindigkeit der Schmelzfront zu

$$v = \frac{\frac{\sigma_0^2}{Gr} a (1 + f(\theta)) - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0^2}}{\rho c \Delta T_s} . \quad (6.2.27)$$

Da die Geschwindigkeit (6.2.27) vom Winkel θ abhängt, erfolgt eine ungleichmässige Ausbreitung der Schmelzfront. Nach einer Zeit δt kann diese durch eine neue Risslänge $a + \delta a$ und einem neuen Radius des Schmelzbereiches $r_0 + \delta r_0$ beschrieben werden. Nach Bild 6.2.2 sind δa und δr_0 durch

$$(r_0 + v(\theta)\delta t) \sin\theta = (r_0 + \delta r_0) \sin\phi \quad (6.2.28)$$

und

$$(r_0 + v(\theta)\delta t) \cos\theta = \delta a + (r_0 + \delta r_0) \cos\phi \quad (6.2.29)$$

bestimmt.

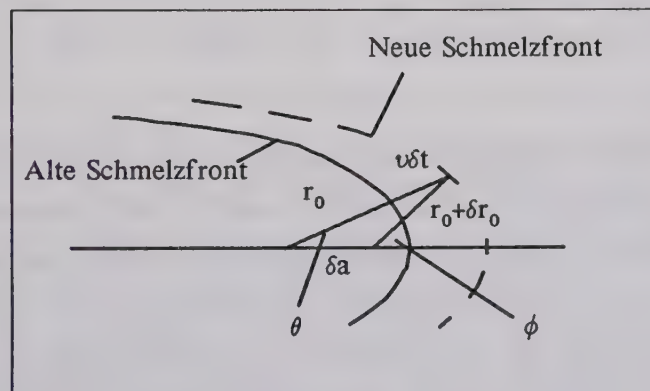


Bild 6.2.2: Neudefinition der Rissparameter bei Risswachstum

Durch Auflösen von (6.2.28) und (6.2.29) nach den Termen mit ϕ , nach Quadrierung und nach Addition beider Gleichungen folgt in linearer Näherung

$$\nu(\theta) \delta t - \delta a \cos \theta = \delta r_0 . \quad (6.2.30)$$

Gleichung (6.2.30) gilt für alle Winkel θ im Bereich der Rissspitze. Setzt man den Ausdruck (6.2.27) in (6.2.30) ein und entwickelt mit Hilfe von (6.2.14) bis zur zweiten Ordnung nach dem Winkel θ , erhält man

$$\frac{\frac{\sigma_0^2}{G\tau} a \left[1 + \frac{(1-\nu)^2}{2 \cdot 3(1+\nu)^2} \right] - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0^2}}{\rho c \Delta T_s} \delta t - \delta a = \delta r_0 \quad (6.2.31)$$

und

$$\frac{\sigma_0^2}{2^2 G\tau} a \left[1 - \frac{(1-\nu)^2}{3(1+\nu)^2} \right] \frac{1}{\rho c \Delta T_s} \delta t - \delta a = 0 . \quad (6.2.32)$$

So ergeben sich aus beiden Relationen die Risswachstumsgleichungen

$$\frac{da}{dt} \simeq \frac{\delta a}{\delta t} = \frac{1}{\rho c \Delta T_s} \frac{\sigma_0^2}{2^2 G\tau} a \left[1 - \frac{(1-\nu)^2}{3(1+\nu)^2} \right] \quad (6.2.33)$$

und

$$\frac{dr_0}{dt} \simeq \frac{\delta r_0}{\delta t} = \frac{1}{\rho c \Delta T_s} \left[\frac{\sigma_0^2}{2^2 G\tau} a \left[3 + \frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2} \right] - \lambda \Delta T_s \frac{1}{r_0} \right] . \quad (6.2.34)$$

Nach (6.2.33) wird die Risslänge a stets zunehmen. Da die Relaxationszeit von der Spannung in der Umgebung der Rissspitze abhängt, ist die Risswachstumsgeschwindigkeit vom Radius r_0 abhängig. Dieser hingegen kann sowohl zu- oder abnehmen. Im ersten Fall wird der Riss "abstumpfen", die Spannungen an der Rissspitze abfallen und der Riss gebremst. Bei einer Reduktion des Krümmungsradius der Rissspitze hingegen wird die Rissausbreitung beschleunigt. Nach (6.2.34) werden Risse mit einem Krümmungsradius grösser als

$$r_{0\text{krit}} = \lambda \Delta T_s \frac{2^2 G r}{\sigma_0^2} \frac{1}{a} \frac{1}{3 + \frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2}} \quad (6.2.35)$$

abstumpfen hingegen mit einem kleineren diesen noch weiter reduzieren. Das Versagen durch Anwachsen des Rissspitzenradius mit der folgenden langsamen Rissfortpflanzung entspricht dem Duktilbruch. Ein Extremfall dieser Rissabstumpfung stellt der Wabenbruch [5.9] dar, bei dem die Risse zu Poren verformt werden. Nimmt im Verlauf des Bruches der Krümmungsradius der Rissspitze dagegen ab, erfolgt eine Beschleunigung der Rissfortpflanzung ohne grosser plastischer Verformung. Dieser Fall entspricht dem Sprödbbruch.

Im flüssigen Grenzfall, wo die Relaxationszeit sehr klein ist, wird der Term in der Spannung in (6.2.34) viel grösser als der in der Wärmeleitung sein. Demnach wird der Rissradius während des "Bruchvorganges" zunehmen und das Material ein duktiles Verhalten zeigen. Dies trifft bei Flüssigkeiten oder fliessfähigen Materialien zu, wo ein Riss sich zu einer Pore rundet. Dieses Anwachsen von "Riss-Poren" könnte auch eine Beschreibung für die Bildung von Kavitationsblasen darstellen. Im Fall eines Festkörpers ist meist die Relaxationszeit gross, so dass unter Umständen in Gleichung (6.2.34) der Term in der Wärmeleitung überwiegt und bei einem Bruch der Rissradius abnimmt. Vor allem Materialien mit Bindungen wie z.B. kovalente Bindungen werden lange Relaxationszeiten aufweisen und folglich sprödes Verhalten zeigen. Bei tiefen Temperaturen wird die Relaxationszeit zunehmen und das Material "verspröden". Dagegen wird bei hohen Temperaturen die Relaxationszeit kleiner und das Material die Tendenz zeigen duktil zu werden. Ein extremes Beispiel bildet der ferritische Stahl der sich unterhalb 0°C spröde und oberhalb duktil verhält. Es muss aber angenommen werden, dass in diesem Fall ein weiterer Relaxationsmechanismus bei 0°C aktiv wird und so sich die Relaxationszeit drastisch ändert. Austenitischer Stahl zeigt z.B. nur einen langsamen Übergang zu sprödem Verhalten bei tiefen Temperaturen. Ein weiterer wichtiger Punkt stellt die Dynamik der Relaxationsquellendichte dar. Wie im Abschnitt 5.2. gezeigt, können Härtungsprozesse während der Belastung dazu führen, dass die Relaxationszeit zeitlich zunimmt. In anderen Worten kann eine relativ duktile Probe mit der Zeit verspröden. Ein Material, das unter Dauerlast beansprucht wird, kann folglich nach einer Anzahl Lastspiele soweit

verspröden, dass ein Sprödbbruch zum Versagen der Probe führt. Dies könnte die Grundlage zur Berechnung der Wöhlerkurve darstellen.

Gleichungen (6.2.33) bis (6.2.35) zeigen qualitativ eine gute Übereinstimmung mit bekannten Bruchverhalten der Materialien. Ein Vergleich der Festigkeit (6.2.4) mit der entsprechenden Formel des Griffith'schen Bruchkriteriums (siehe [6.1]) zeigt, dass das beschriebene Modell einer Erweiterung der Griffith'schen Sprödbbruchtheorie entspricht. Eine genauere Studie, die sich vor allem mit dem quantitativen Vergleich zwischen Theorie und Experiment befasst, ist notwendig. Hierfür muss vor allem die Spannungs-, Temperatur- und Zeitabhängigkeit der Relaxationszeit untersucht werden. Dies soll in späteren Arbeiten betrachtet werden.

7. Ein Beispiel einer technischen Anwendung

Modelle, wie das Vorgestellte, sollen nicht nur die Möglichkeit eröffnen, ein tieferes Verständnis der Zusammenhänge zu erreichen, sondern auch eine Grundlage für praktische Berechnung von aktuellen technischen Problemen bieten. Hier wird das Modell auf den Fall eines Spreizdübels angewendet, bei dem durch die plastische Verformung des Betons die zur Befestigung notwendige Vorspannung mit der Zeit abfällt.

7.1. Das mechanische Modell des Spreizdübels

Eines der interessanten Anwendungsbeispiele des Modells ist die Vorspannungsrelaxation bei Dübeln in Beton. Wie Bild 7.1.1 zeigt, besteht der Dübel aus einer Ankerstange, die durch Drehen eines Konus gegen mehrere Spreizlappen andrücken kann. Die Spreizlappen drücken somit auf die Wände des Bohrloches, in dem der Dübel befestigt werden soll.

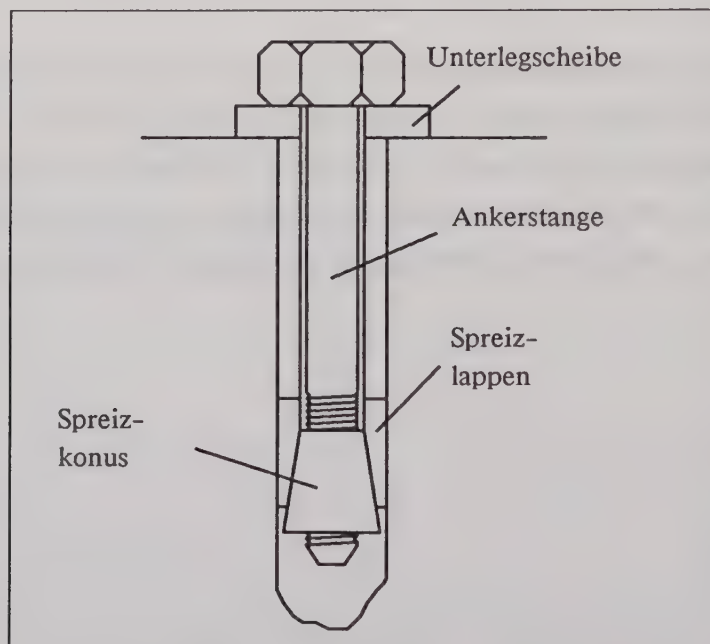


Bild 7.1.1: Der Aufbau des Dübels

Der Vorteil dieses Systems besteht darin, dass durch eine Belastung eine stärkere Spreizung und somit ein höherer Druck auf die Bohrlochwand eintritt. Um eine auch gegen dynamische Belastung sichere Befestigung zu erstellen, muss die Ankerstange vorgespannt werden. Da aber der Beton in tangentialer Richtung unter Zug und in radialer Richtung unter Druck steht, wird laut dem Stoffmodell eine Relaxation einsetzen. Das Material fließt radial nach aussen, die Spreizlappen können nachspreizen,

der Konus gleitet nach und die Vorspannung in der Ankerstange nimmt ab. Theoretisch müsste der Relaxationsprozess dann zum Stillstand kommen, wenn durch Materialfluss sowohl in tangentialer als auch in radialer Richtung das Material auf Druck beansprucht wird (isostatischer Druckzustand). Dieser Zustand kann aber ohne Grenzen, die den Materialfluss verhindern, nicht erreicht werden. Die Vorspannungsrelaxation kann zwar mittelfristig durch einen lokalen isostatischen Druckzustand um die Spreizlappen verlangsamt werden, wird aber nie zum vollständigen Erliegen kommen.

Um die Randbedingungen zu ermitteln, muss der Spreizmechanismus genauer betrachtet werden. Die Definition der verschiedenen Parameter des Dübel-Bohrlochsystems sind im Bild 7.1.2 dargestellt.

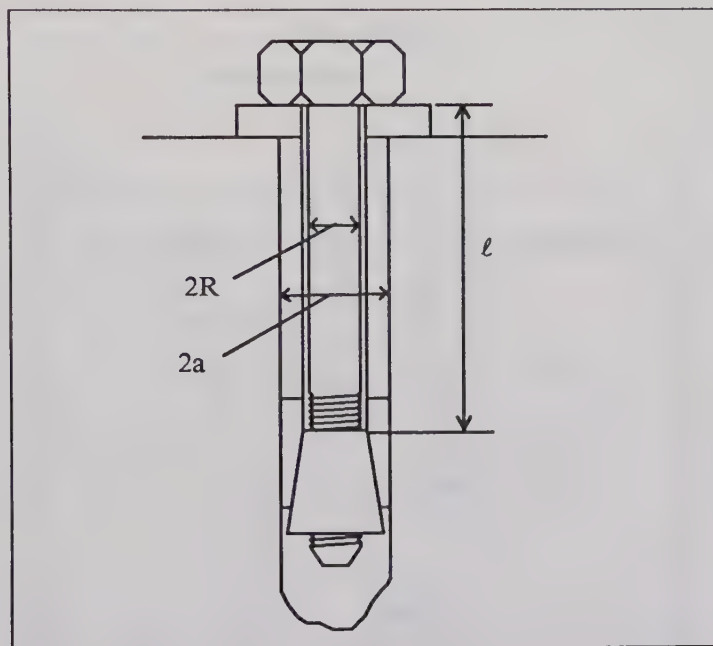


Bild 7.1.2: Definition der Dübelparameter

Der Abstand zwischen Abstützpunkt der Ankerstange (Unterlegscheibe) und Konus sei vor dem Vorspannen gleich l . Die durch das Einschrauben der Ankerstange in den Konus oder durch Belasten wird die Länge l zur Zeit t um $\Delta l(t)$ verändert. Der zu dieser Zeit vom Konus zurückgelegte Weg sei $x(t)$. Die Ankerstange habe den

Radius R und das Bohrloch den Radius a . Ist E_s der Elastizitätsmodul der Ankerstange, dann ist die zur Zeit t auf den Konus wirkende Kraft

$$F = E_s \pi R^2 \frac{\Delta \ell(t) - x(t)}{\ell} . \quad (7.1.1)$$

Wie im Bild 7.1.3 gezeigt, wirkt die Komponente

$$F_R \cos \theta \quad (7.1.2)$$

der Reibkraft F_R zwischen Spreizlappen und Konus der Kraft F entgegen. Hierbei ist θ der Neigungswinkel des Konus.

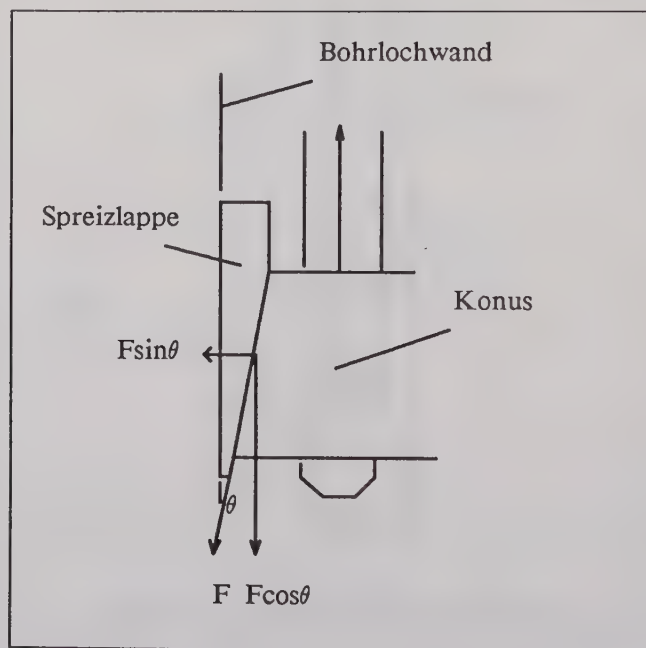


Bild 7.1.3: Kräfte im System Konus-Spreizlappen-Untergrund

Durch Gleichsetzen von Gleichung (7.1.1) und (7.1.2) folgt, dass die Kraft auf die Bohrlochwand

$$F_R \sin\theta = E_s \pi R^2 \frac{\Delta\ell(t) - x(t)}{\ell} \tan\theta \quad (7.1.3)$$

ist. Haben die Spreizlappen über die Länge d Kontakt mit der Bohrlochwand, dann ist die radiale Spannung an der Bohrlochwand

$$\sigma_r(a,t) = \frac{F_R \sin\theta}{2\pi ad} = E_s \frac{R^2}{2ad} \frac{\Delta\ell(t) - x(t)}{\ell} \tan\theta \quad (7.1.4)$$

Wie Bild 7.1.4 zeigt, ist bei einer radialen Verschiebung der Bohrlochwand um $u_r(t)$ der Konus um die Strecke

$$x(t) = u_r(t) \cot\theta \quad (7.1.5)$$

geglitten.

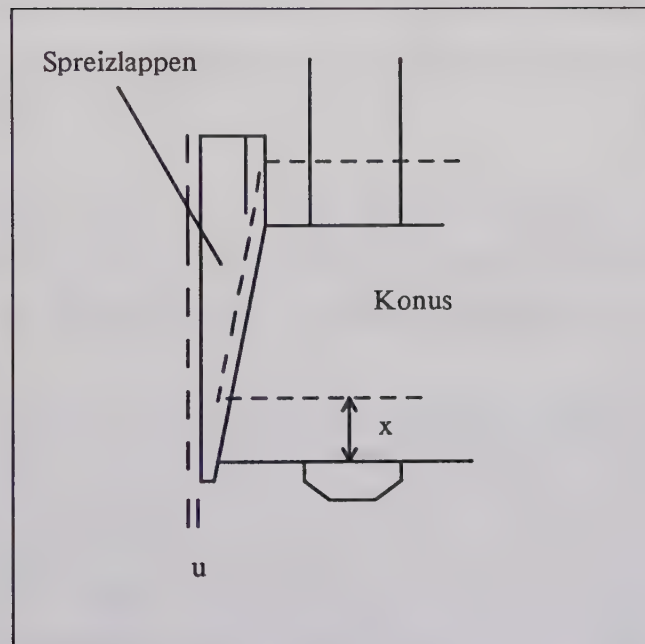


Bild 7.1.4: Verschiebung des Konus und der Spreizlappen

Mit Gleichung (7.1.4) und (7.1.5) folgt der Zusammenhang zwischen Spannung $\sigma_r(a,t)$ und Verschiebung an der Bohrlochwand $u_r(a,t)$

$$\sigma_r(a,t) = \sigma_b(t) - \frac{1}{\chi} u_r(a,t) \quad (7.1.6)$$

mit

$$\frac{1}{\chi} = E_s \frac{R^2}{2ad} \frac{1}{\ell} \quad (7.1.7)$$

und

$$\sigma_b(t) = \frac{1}{2} \frac{R^2}{ad} \tan \theta E_s \frac{\Delta \ell(t)}{\ell} . \quad (7.1.8)$$

Im Fall, dass keine Relaxation stattfindet, ist die Spannung auf der Bohrlochwand $\sigma_b(t)$ und in der Ankerstange $E_a \Delta \ell(t)/\ell$.

Gleichung (7.1.6) bildet die Randbedingung für die Berechnung des Materialflusses (Beton) in der Umgebung der Spreizlappen. Um aber die konstitutiven Gleichungen zu lösen ist es notwendig, das Modell für den Beton zu charakterisieren. Dies wird in einer vereinfachten Form im Abschnitt 7.2. durchgeführt.

7.2. Modellparameter für den Beton

Beton besteht aus einer Zementmatrix und den eingebetteten Zuschlagstoffen (Steine). Der Zement enthält feinkörnigen Sand (ϕ kleiner 4mm). Die Zuschlagkörner sind je nach Betonart in unterschiedlichen Grössen und Mengen vorhanden. Als Beispiel gilt zur Herstellung eines B25er Betons, wie er für Versuchszwecke bei der Firma Hilti verwendet wird, das folgende Rezept:

Komponente	Gewichtsanteil	Volumenanteil
Zement	300 kg/m ³	0.100 m ³
Wasser	180 kg/m ³	0.180 m ³
Sand 0 - 4 mm	760 kg/m ³	0.284 m ³
Rundkies 4 - 8 mm	480 kg/m ³	0.178 m ³
Rundkies 8 - 16 mm	670 kg/m ³	0.248 m ³

Die Bezeichnung "B25" deutet auf die Druckfestigkeit eines genormten Probekörpers hin. In diesem Fall erreicht ein 20x20x20 cm grosser Probekörper 28 Tage nach Herstellung bei einem einachsigen Druckversuch eine Druckfestigkeit von 25 N/mm².

Zusätzlich zu den etwa 0.001 m³ grossen Luftporenvolumen ($\phi > 10\mu\text{m}$) hinterlässt das Wasser, das nicht zum Abbindeprozess des Betons beiträgt, beim Trocknen etwa 0.040 m³ "Kapillarporen" ($\phi \simeq 1\mu\text{m}$). In der Zementmatrix sind durch den Abbindeprozess etwa 0.040 m³ Gelporen ($\phi < 0.1 \mu\text{m}$) entstanden. Eine genauere Beschreibung der Prozesse beim Abbinden des Betons ist durch Czernin in [7.1] ausführlich dargestellt.

Die Zementmatrix kann als relativ homogen angesehen werden. Die Zuschlagskörner zerstören diese Homogenität. Da das Zuschlagskorn erheblich grössere Relaxationszeiten als die Zementmatrix zeigt, kann dieses als "nicht fließfähig"

betrachtet werden. Für Beton besteht die Möglichkeit, aus der Analogie der Einsteinischen Betrachtung der Viskosität einer Flüssigkeit mit starren Kugeln ([7.2] und [7.3]) die Relaxationszeit zu bestimmen. Ist das Volumen der Kugeln V_k und das Gesamtvolumen der Flüssigkeit und Kugeln V , dann ist nach Einstein die Viskosität des Systems

$$\eta_k = \frac{\eta_0}{1 - \frac{5}{2} \frac{V_k}{V}}, \quad (7.2.1)$$

wobei η_0 die Viskosität der Flüssigkeit ist. Wie Reiner zeigt [7.4], gilt diese Beziehung für den Einfluss des Sandes auf das Kriechverhalten von Sandbetonproben (Sand als einziger Zuschlagstoff) falls V_{Sand}/V kleiner als 0.1 ist. Allgemein kann aber angenommen werden, dass die Viskosität des Betons sich aus der Viskosität des Zements durch eine Funktion

$$\eta_{\text{Beton}} = \eta_{\text{Zement}} f\left(\frac{V_{\text{Zuschlag}}}{V}\right) \quad (7.2.2)$$

berechnen lässt. Im Grenzfall $V_{\text{Zuschlag}} \ll V$ muss sich (7.2.2) zu (7.2.1) reduzieren. Die Relaxationszeit lässt sich dann nach (4.2.8) aus der Viskosität (7.2.2) durch

$$\tau_{\text{Beton}} = \frac{\tau_{\text{Zement}}}{f\left(\frac{V_{\text{Zuschlag}}}{V}\right)}. \quad (7.2.3)$$

berechnen. In erster Näherung sollte folglich das Modell auch Beton beschreiben, in dem die Relaxationszeit des homogenen Materials durch einen Faktor korrigiert wird.

Die Charakterisierung der Zementmatrix kann nach Abschnitt 5.2. durch die Analyse von Kriechversuchen erreicht werden. Als Beispiel können Daten aus der

umfangreichen Arbeit von Wittmann [7.5] über die physikalischen Eigenschaften von Zementstein (Sandbeton) herangezogen werden. Auch lange Zeit nach seiner Herstellung zeigt Beton ein ausgeprägtes Kriechverhalten. Ein Beispiel aus der Arbeit von Wittmann [7.5] ist in Bild 7.2.1 dargestellt.

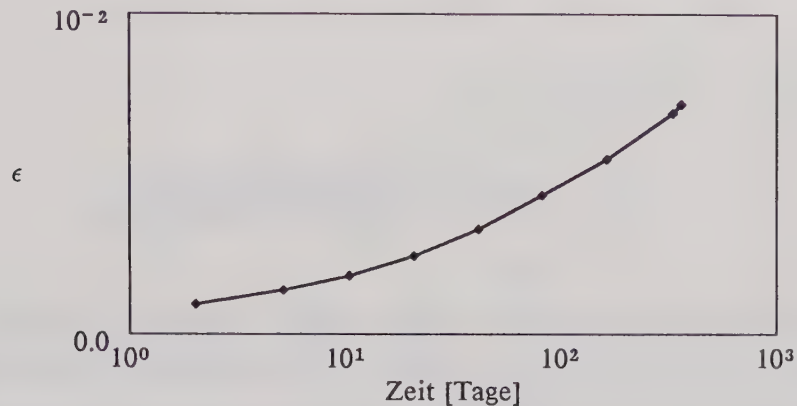


Bild 7.2.1: Kriechverformung von Sandbeton nach [7.5]

Aus den Kurven wird sichtbar, dass für längere Kriechversuche nach Abschnitt 5.2 kein reiner Härtingsprozess stattfindet. Vielmehr muss angenommen werden, dass der Erzeugungsprozess (3.1.48) nicht vernachlässigt werden kann. Hierfür spricht die Tatsache, dass die Probe nach längerer Zeit eine Kriechgeschwindigkeit aufweist, die höher als bei einem reinem Härtingsprozess ist. Ein Erholungsprozess würde die Kriechgeschwindigkeit dagegen stark reduzieren, so dass zu vermuten ist, dass Erholungsprozesse eine untergeordnete Rolle spielen. In diesem Fall wird folglich die Kinetik der Relaxationsquellendichte durch

$$\frac{dn_a}{dt} = q_a - h_a n_a^2 \quad (7.2.4)$$

beschrieben. Da in diesem Versuch die Spannung und die innere Verzerrung konstant sind, kann Gleichung (7.2.4) direkt integriert werden. Es ergibt sich so

$$n_a(t) = \alpha \frac{n_a(0) \cosh(\gamma t) + \alpha \sinh(\gamma t)}{n_a(0) \sinh(\gamma t) + \alpha \cosh(\gamma t)} \quad (7.2.5)$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{q_a}{h_a} \quad \text{und} \quad \gamma^2 = q_a h_a \quad . \quad (7.2.6)$$

Nach (5.2.1) und (5.2.10) ist folglich

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{\sigma_0}{E} \alpha \frac{n_a(0) \cosh(\gamma t) + \alpha \sinh(\gamma t)}{n_a(0) \sinh(\gamma t) + \alpha \cosh(\gamma t)} \quad (7.2.7)$$

Die äussere Verzerrung kann durch direkte Integration von (7.2.7) ermittelt werden. Ist die Verzerrung zu Beginn des Kriechversuchs durch die elastische Verzerrung σ_0/E gegeben, dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 + \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{1}{h_a} \ln \left[\cosh(\gamma t) + \frac{n_a(0)}{\alpha} \sinh(\gamma t) \right] \right] \quad (7.2.8)$$

Kriechversuche werden meist durch die Kriechzahl

$$\phi_t = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\sigma_0}{E}}{\frac{\sigma_0}{E}} \quad (7.2.9)$$

beschrieben. In diesem Fall ergibt (7.2.8) eine Kriechzahl

$$\phi_t = \frac{2(1+\nu)}{3\tau_0} \frac{1}{h_a} \ln \left[\cosh(\gamma t) + \frac{n_a(0)}{\alpha} \sinh(\gamma t) \right] \quad (7.2.10)$$

Kriechzahlen von Kriechversuchen unter unterschiedlicher Lasten sind in Bild 7.2.2 dargestellt. Die Versuchsdaten stammen aus der bereits erwähnten Arbeit

von Wittmann [7.5].

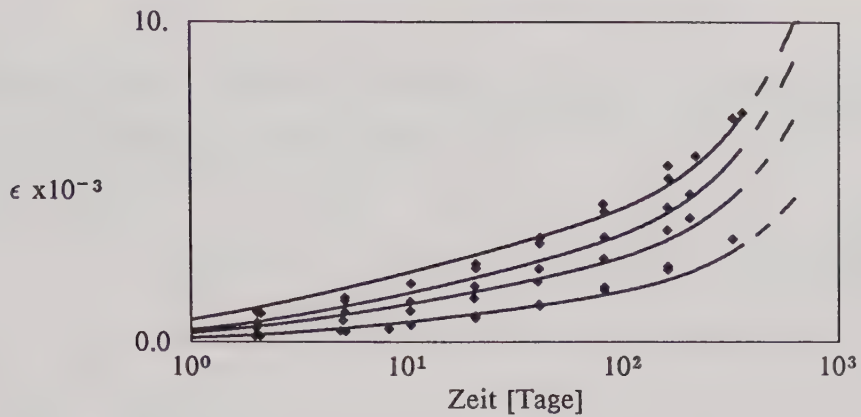


Bild 7.2.2: Kriechversuche unter verschiedenen Lasten

Die entsprechend angepassten Parameter ergeben:

Belastung σ_0	$\tau_0 h_a$	$(h_a q_a)^{1/2}$	$n_a(0) (h_a/q_a)^{1/2}$
6.8 N/mm ²	2.2×10^3	$1.6 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	27
12.8 N/mm ²	1.4×10^3	$1.6 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	43
14.2 N/mm ²	1.2×10^3	$1.6 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	47
22.5 N/mm ²	1.1×10^3	$1.6 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	100

Hieraus folgt, dass

$$\tau_0 h_a \simeq \text{konst.}, \quad h_a q_a \simeq \text{konst.} \quad \text{und} \quad n_a(0) (h_a/q_a)^{1/2} \simeq \sigma_0 \quad (7.2.11)$$

ist. Es kann angenommen werden, dass die Verzerrung des Materials die Aktivierungsschwelle für die Relaxation reduziert. Dies bedeutet, dass die Relaxationszeit τ_0 mit steigender Last abnehmen muss. Als einfacher Ansatz kann eine $1/\sigma_0$ Abhängigkeit angenommen werden, wodurch aus (7.2.11)

$$h_a \simeq \sigma_0 \quad \text{und} \quad q_a \simeq \frac{1}{\sigma_0} \quad (7.2.12)$$

folgen.

Es sollte an dieser Stelle erwähnt werden, dass in manchen Fällen die Kriechfunktion (7.2.10) das Kriechen nicht zufriedenstellend darstellt. So zeigt Bild 7.2.3 ein Vergleich mit dem Kriechversuch von Trost, Cordes und Abele [7.6] für 40 Jahre altem Sandbeton über fast sechs Dekaden (1.44 Minuten bis 1 Jahr) eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Kriechzahl (7.2.10) und Messung.

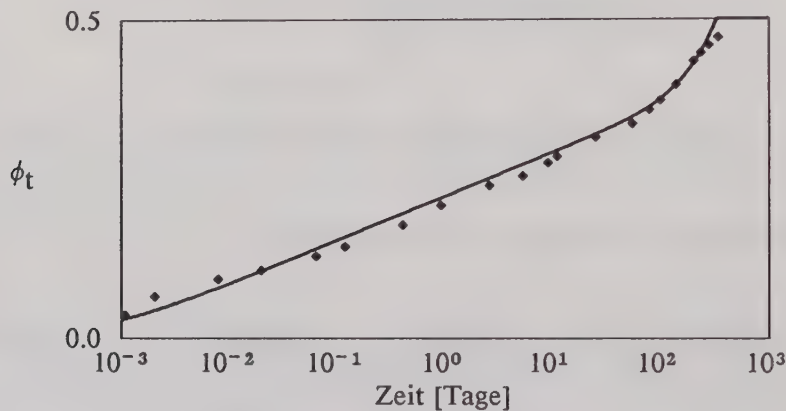


Bild 7.2.3: Kriechzahl für 40 Jahre altem Sandbeton [7.6]

Nach der Arbeit von Wittmann [7.5] muss dagegen bei der Beschreibung des Kriechens von jüngerem Sandbeton (28 Tage) nicht der logarithmische Abfall sondern der klassische Ansatz von Andrade [7.7] oder den modifizierten Ansatz von Cottrell und Aytakin [7.8]

$$\phi \simeq t^{1/3} \quad (7.2.13)$$

angenommen werden. Nach Wittmann [7.5] ist im Fall des Betons der Exponent eher um 2/5 und erreicht erst bei hoher relativer Feuchtigkeit 1/3. Eine Beschreibung der Kriechfunktion durch (7.2.12) ist folglich nur über zwei bis drei Zeitdekaden mit geringer Abweichung möglich. Es ist folglich anzunehmen, dass für jungen Beton die Gleichung für die Kinetik der Relaxationsquellendichte unvollständig ist. Ein

weiterer Hinweis hierfür ist die Tatsache, dass während der ersten Jahre nach der Herstellung des Betons die Festigkeit erheblich zunimmt. Dieser verzögerte "Abbindeprozess" müsste gesondert in der Kinetik der Relaxationsquellendichte berücksichtigt werden. Für die technische Anwendung soll hier nicht auf dieses Problem eingegangen werden. Es zeigt sich, dass diese Effekte von untergeordneter Bedeutung sind für die Vorspannungsrelaxation des Dübels.

7.3. Die Vorspannungsrelaxation

Für die Beschreibung der Vorspannungsrelaxation wird zur Vereinfachung die Endlichkeit der Spreizlappen vernachlässigt. Sei u_r die radiale Verschiebung und v_r die entsprechende Geschwindigkeit. Die innere Verzerrungskomponenten ϵ_r , ϵ_θ und ϵ_z erfüllen die Plastizitätsgleichungen (3.2.4), so dass

$$\frac{d\epsilon_r}{dt} = -\frac{1}{\tau} \epsilon_r + \frac{1}{3\tau} (\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (7.3.1)$$

$$\frac{d\epsilon_\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau} \epsilon_\theta + \frac{1}{3\tau} (\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + \frac{1}{r} v_r \quad (7.3.2)$$

$$\frac{d\epsilon_z}{dt} = -\frac{1}{\tau} \epsilon_z + \frac{1}{3\tau} (\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) \quad (7.3.3)$$

ist. Für eine quasistatische Verformung reduziert sich (4.1.1) zu

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (7.3.4)$$

Im Grenzfall $\tau \rightarrow \infty$ reduzieren sich die Gleichungen (7.3.1) bis (7.3.3) zu

$$\frac{d\epsilon_r}{dt} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \frac{d\epsilon_\theta}{dt} = \frac{1}{r} v_r \quad \text{und} \quad \frac{d\epsilon_z}{dt} = 0, \quad (7.3.5)$$

was in (7.3.4) zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r = 0 \quad (7.3.6)$$

führt. Ist σ_0 die radiale Spannung an der Bohrlochwand, dann sind die Lösungen von (7.3.6)

$$u_r = - \frac{\sigma_0 a}{2G} \frac{a}{r}, \quad \epsilon_r = \frac{\sigma_0}{2G} \frac{a^2}{r^2} = - \epsilon_\theta \quad \text{and} \quad \epsilon_z = 0. \quad (7.3.7)$$

Um das Fließen zu beschreiben, kann die Lösung (7.3.7) zu

$$u_r(r,t) = - u(t) \frac{a}{r}, \quad \epsilon_r(r,t) = \epsilon(t) \frac{a^2}{r^2} = - \epsilon_\theta(r,t) \quad \text{and} \quad \epsilon_z(r,t) = 0 \quad (7.3.8)$$

verallgemeinert werden. Hierbei wird die zeitliche, aber nicht die räumliche, Abhängigkeit der Relaxationszeit berücksichtigt. Mit dem Ansatz (7.3.8) reduziert sich (7.3.1) mit Hilfe der Gleichungen (7.3.2) bis (7.3.4) zu

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{1}{\tau(\epsilon)} \epsilon - \frac{1}{a} \frac{du}{dt}. \quad (7.3.9)$$

Zusätzlich zu dieser Gleichung muss die Randbedingung (7.1.6) erfüllt werden. Mit Hilfe der Spannungs-Verzerrungsrelation (4.1.2) kann die Randbedingung (7.1.6) zu

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{\chi a} \frac{du}{dt} \quad (7.3.10)$$

mit

$$\frac{1}{\chi} = \frac{E_s}{2G} \frac{R^2}{2d\ell}. \quad (7.3.11)$$

umgeschrieben werden. Gleichung (7.3.9) reduziert sich mittels der Beziehung (7.3.10) zu

$$\frac{d\epsilon}{dt} = - \frac{1}{1+\chi} \frac{1}{\tau(t)} \epsilon. \quad (7.3.12)$$

Eine direkte Integration von (7.3.12) ist nicht möglich, da die Relaxationszeit τ

zeitabhängig ist. Wie schon im Abschnitt 3.1 erwähnt, ist die Relaxationszeit von der Relaxationsquellendichte abhängig. Die Kinetik der Relaxationsquellendichte wird durch (3.1.48) beschrieben. Nach Abschnitt 7.2 spielen im Fall des Betons bei Zimmertemperatur vor allem die Erzeugungs- und die Härtungsprozesse, beschrieben durch die Faktoren q_a und h_a , eine Rolle. Da im Bereich der Spreizlappen relativ hohe Spannungen erreicht werden, ist nach (7.2.26) der Erzeugungsprozess von untergeordneter Bedeutung. Der Term h_a ist dagegen in erster Näherung eine lineare Funktion der Spannung bzw. der Verzerrung. Folglich kann angenommen werden, dass die Kinetik der Relaxationsquellendichte durch

$$\frac{dn_a}{dt} = -\gamma \epsilon n_a^2 \quad (7.3.13)$$

beschrieben wird, wobei γ ein Proportionalitätsfaktor ist. Mit der Definition (3.1.44) kann in Gleichung (7.3.12) die Relaxationszeit als Funktion der Relaxationsquellendichte ausgedrückt werden. So ergibt

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{1}{1+\chi} \frac{1}{\tau_0} n_a \epsilon \quad (7.3.14)$$

zusammen mit (7.3.13) ein Gleichungssystem zur Beschreibung des Betonverhaltens in der näheren Umgebung der Spreizlappen. Durch Elimination von n_a aus (7.3.14) ergibt (7.3.13) die nichtlineare Relaxationsgleichung

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} \epsilon = \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)^2 + \frac{\gamma\tau_0}{1+\chi} \epsilon \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)^2. \quad (7.3.15)$$

Da der Härtungsprozess nur ein Teil der gesamten Relaxation bildet, ist die Relaxationszeit τ_0 viel länger als die Härtungszeit $1/\gamma$. Folglich ist $\gamma\tau_0 \gg 1$, so dass sich (7.3.15) auf

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = \frac{\gamma\tau_0}{1+\chi} \left(\frac{d\epsilon}{dt} \right)^2 \quad (7.3.16)$$

reduziert. Bei der Befestigung des Dübels wird die radiale Verzerrung durch den elastischen Grenzfall gegeben sein. Ist σ_0 die radiale Spannung, dann folgt

$$\epsilon(0) = \frac{\sigma_0}{2G} . \quad (7.3.17)$$

Die durch den beginnenden Relaxationsprozess entstehende Geschwindigkeit der Verzerrung ergibt sich aus Gleichung (7.3.9) zu

$$\frac{d}{dt} \epsilon(0) = - \frac{1}{1+\chi} \frac{1}{\tau_0} n_a(0) \epsilon(0) , \quad (7.3.18)$$

wobei $n_a(0)$ die Relaxationsquellendichte vor der Belastung ist. Mit den Randbedingungen (7.3.17) und (7.3.18) ergibt die Integration der Gleichung (7.3.16)

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{2G} - \frac{1}{1+\chi} \frac{1}{\gamma\tau_0} \ln \left[1 + \frac{\sigma_0}{2G} n_a(0) \gamma t \right] . \quad (7.3.19)$$

Aus der Spannungs-Verzerrungsrelation (4.1.2) folgt für die radiale Spannung

$$\sigma_r(t) = \sigma_0 - 2G \frac{1}{\gamma\tau_0(1+\chi)} \ln \left[1 + \frac{\sigma_0}{2G} n_a(0) \gamma t \right] . \quad (7.3.20)$$

Die Kraft an der Ankerstange kann mit Hilfe von (7.3.20) aus (7.1.1), (7.1.3) und (7.1.4) berechnet werden. Es ergibt sich der klassische logarithmische Vorspannungsabfall:

$$F(t) = F(0) - G \frac{4\pi ad}{\gamma\tau_0(1+\chi)} \cot\theta \ln\left(1 + \frac{F(0)}{4\pi ad} \frac{1}{G} \tan\theta n_a(0) \gamma t\right) \quad (7.3.21)$$

mit

$$F_s(0) = \sigma_0 2\pi a d \cot\theta \quad . \quad (7.3.22)$$

Die Kraft $F(0)$ entspricht der anfänglichen Belastung der Ankerstange. In Bild 7.3.3 ist ein typisches Beispiel einer gemessenen Vorspannungsrelaxation an einem HSL M16 HILTI Dübel dargestellt [7.9]. Er zeigt den typischen logarithmischen Vorspannungsabfall entsprechend (7.3.21). In diesem Fall ergibt eine Kurvenanpassung ein $\gamma\tau$ von 7.8×10^3 und ein $\gamma n_a(0)$ von 2.9 s^{-1} .

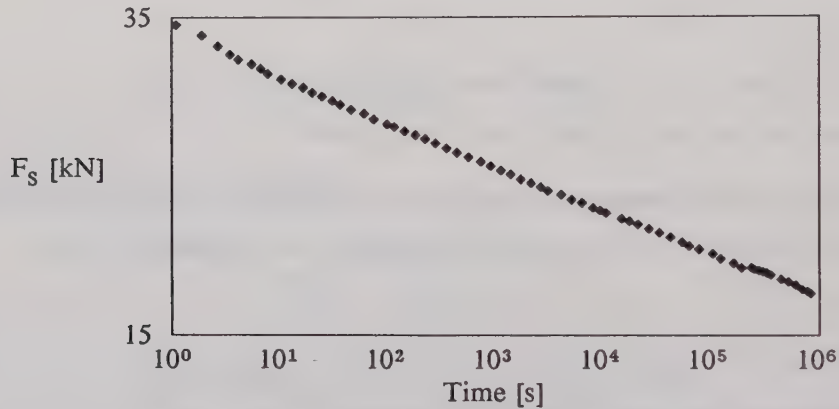


Bild 7.3.3: Vorspannungsrelaxation bei einem HSL M16 HILTI Dübel [7.9]

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass nach diesem Modell für mittelfristige Zeiträume (Jahre) die Härtungsprozesse die Vorspannungsrelaxation bestimmen. Das Material in der Umgebung der Spreizlappen wird durch diesen Härteprozess einerseits eine höhere Festigkeit erreichen, andererseits aber auch spröder sein.

8. Ausblick

Das hier entwickelte Modell stellt eine neue Möglichkeit dar, das viskoelastoplastische Verhalten von Festkörpern zu berechnen. Anders als bei den meisten heute verwendeten Modellen wird in einer vereinfachten Form der Kinetik der Plastizitätsmechanismen Rechnung getragen. Dies ermöglicht in den Fällen, in denen die Mechanismen bekannt sind, eine Berechnung des Materialverhaltens auf einer mikroskopischen Grundlage. So werden, wie in der Arbeit beschrieben, bei verschiedenen Belastungsfällen unterschiedliche Mechanismen wirksam. Sie gezielt zu beeinflussen, ist die Aufgabe der heutigen Werkstoffwissenschaften. Diese Arbeit sollte in diesem Sinne einen Beitrag für zukünftige Untersuchungen leisten.

Neue Möglichkeiten ergeben sich bei der Bruchmechanik (Abschnitt 6.2), wo das Modell einer Verallgemeinerung der Griffith'schen Sprödbbruchtheorie entspricht. Durch die zusätzliche Beschreibung des Duktilbruchs, sowie des Überganges zwischen Duktil- und Spröbverhalten, ergeben sich erste Ansätze zur Berechnung der Wöhlerkurve eines Materials. Im Fall einer Strömung (Abschnitt 6.1) könnte die beschriebene Instabilität dem laminar-turbulent Übergang entsprechen. In diesem Fall müsste die Berechnung der kritischen Reynoldszahl möglich sein. Sowohl im Fall der Bruchdynamik wie in dem der Strömung sollten Arbeiten zu diesen offenen Fragen folgen.

Die Arbeit eröffnet im Bereich der technischen Anwendungen neue Möglichkeiten, technische Lösungen zu erarbeiten. In dieser Arbeit ist als Beispiel die Vorspannungsrelaxation bei Dübeln in Beton dargestellt (Kapitel 7). Das Modell kann aber ebenfalls auch bei der Auslegung von Maschinen zur Betonbearbeitung hilfreich sein. Da eine gute Beschreibung der Kriecheigenschaften von Metallen mit dem Modell erreicht wird, kann auch bei der Auslegung von Metallbauteilen das Modell von Nutzen sein. Da auch die Dämpfereigenschaften von Kunststoffen richtig beschrieben werden, muss Analoges für Kunststoffe gelten.

Eine praktische Umsetzung des Modells für komplexere Probleme muss auf numerischer Basis erfolgen. Durch die zusätzliche Anzahl von Freiheitsgraden ist aber ein Einbau in einem "Finite Elemente Programm" nicht trivial. In nächster Zeit soll ver-

sucht werden, eine vereinfachte Version des Modells in das Finite Elemente Programm MARC MENTAT der Firma MARC Analysis Research Corporation zu implementieren.

9. Literaturhinweise

- [2.1] A. Krawietz
Materialtheorie
Springer-Verlag, Heidelberg 1986
- [2.2] H. Lippmann
Mechanik des Plastischen Fließens
Springer-Verlag, Heidelberg 1981
- [2.3] C. Truesdell, W. Noll
The non-linear field theories of mechanics
Handbuch der Physik III/3 (Hrsg. Flügge)
Springer-Verlag, New York 1965
- [2.4] W. Noll
The foundations of mechanics and thermodynamics
Selected Papers
Springer-Verlag, New York 1974
- [2.5] W.F. Chen, A.F. Saleeb
Constitutive equations for engineering materials
John Wiley & Sons, New York, 1982
- [2.6] W.N. Findley, J.S. Lai, K. Onaran
Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials
North-Holland, Amsterdam, 1976
- [2.7] W. Flügge
Viscoelasticity
Springer-Verlag, Berlin, 1975
- [2.8] R.M. Christensen
Theory of Viscoelasticity
Academic Press, New York, 1982
- [2.9] S. Kaliszky
Plastizitätslehre
VDI-Verlag, Düsseldorf,
- [2.10] R.M. Christensen
Mechanics of composite materials
John Wiley & Sons, New York, 1979

- [2.11] W.F. Chen
Plasticity in reinforced concrete
Mc Graw Hill, New York, 1982
- [2.12] J. Eberhardsteiner, G. Meschke, H. Mang
Triaxiales konstitutives modellieren von Beton
Institut für Festigkeitslehre, Wien, 1987
- [2.13] L.D. Landau, E.M. Lifschitz
Elastizitätstheorie
Akademie Verlag, Berlin, 1983
- [3.1] J.P. Hirth, J. Lothe
Theory of Dislocations
Wiley & Sons, New York, 1982 (ed. 2)
- [3.2] F.R.N. Nabarro
Dislocations in Solids
North Holland, Amsterdam, 1979
- [3.3] C.S. Barrett
Structure of metals
Pergamon Press, Oxford, 1980
- [3.4] J. Friedel
Dislocations
Addison Wesley, 1964
- [3.5] F.R.N. Nabarro
Theory of Cristal Dislocations
Oxford University Press, 1967
- [3.6] Characterization of defects in materials
Symposium, December 1-2, 1986, Boston
Material Research Society, vol. 82
- [3.7] J. Bardeen, C. Herring
Imperfections in Nearly Perfect Crystals
Wiley & Sons, New York, 1952
- [3.8] F.R.N. Nabarro, Z.S. Basinski, D.B. Holt
The plasticity of pure single crystals
Taylor & Francis, London, 1964

- [3.9] S. Amelinckx
Direct observation of dislocations
Academic Press, 1964
- [3.10] L.E. Reichl
A Modern Course in Statistical Physics
Edward Arnold Ltd., London, 1980
- [3.11] G. Busch, H. Schade
Vorlesungen über Festkörperphysik
Birkhäuser Verlag, Basel, 1973
- [3.12] C. Kittel
Einführung in die Festkörperphysik
Wiley & Sons, Frankfurt, 1973
- [3.13] N.W. Ascroft, N.D. Mermin
Solid State Physics
Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976
- [3.14] L.D. Landau, E.M. Lifschitz
Statistische Physik (Teil 1)
Akademie Verlag, Berlin, 1979
- [3.15] R. Becker
Theorie der Wärme
Springer-Verlag, Heidelberg, 1975
- [3.16] F. Reif
Fundamentals of Statistical and Thermal Physics
McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo, 1965
- [3.17] H.J. Queisser
Phys. Rev. Lett. 54,234 (1985)
- [3.18] D. Polder, K. Weiss
Phys. Rev. A 17, 1478 (1978)

- [4.1] H. Goldstein
Classical Mechanics
Addison-Wesley, Menlo Park California, 1981

- [4.2] H. Mori
Prog. Theor. Phys. 33 (1965), 423
- [4.3] H. Mori
Prog. Theor. Phys. 49 (1973), 1516
- [4.4] S. Lovesey
Condensed matter physics
(Frontiers in physics; v. 49)
Benjamin/Cummings, Massachusetts, 1980
- [4.5] P.M. Morse, H. Feshbach
Methods of Theoretical Physics (Part I and II)
McGraw-Hill, New York, 1953
- [4.6] L.D. Landau und E.M. Lifschitz
Hydrodynamik
Akademischer Verlag, Berlin, 1981
- [4.7] H. Schlichting
Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982
- [4.8] A. Budó
Theoretische Mechanik
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980

- [5.1] K.F. Graf
Wave motion in elastic solids
Clarendon Press, Oxford, 1975
- [5.2] S. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver jr.
Vibration Problems in Engineering
Wiley & Sons, New York, 1974
- [5.3] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier
Theory of Elasticity
Mc Graw-Hill Koyakusha, Tokyo, 1970
- [5.4] P.G. McVetty
Mechanical Engineering, 56 (1934) 149
- [5.5] F. Garofalo
ASTM Special Technical Publication Nr. 283 (1960) 82-98

- [5.6] B. Ilchner
Hochtemperatur-Plastizität
Springer-Verlag, Berlin, 1973
- [5.7] C.R. Barrett, W.D. Nix
Acta Metalurgica, 13 (1965) 1247-58
- [5.8] O.H. Wyatt
Proc. Phys. Soc. 66B (1953) 459
- [5.9] B. Ilchner
Werkstoffwissenschaften
Springer-Verlag, Berlin, 1982
- [5.10] H. Berckhemer, F. Auer, J. Drisler
Physics of the Earth and Planetary Interior, 20 (1979) 48-59
- [5.11] P. Haasen
Physikalische Metallkunde
Springer-Verlag, Berlin, 1974
- [5.12] H. Böhm
Einführung in die Metallkunde
Hochschultaschenbuch 196/196a
Bibliographisches Institut, Mannheim, 1968
- [5.13] C. Zener
Elasticity and Anelasticity
Univ. Chicago Press, Chicago, Illinois, 1948
- [5.14] B.J. Lazan
Damping
Pergamon Press, Oxford, 1968
- [5.15] J.S. Bendat, A.G. Piersol
Engineering Application of Correlation and Spectral
Analysis
John Wiley & Sons, New York, 1980
- [5.16] L.R. Rabiner, B. Gold
Theory and Application of Digital Signal Processing
Prentice-Hall, New Jersey,

- [6.1] H.-P. Rossmanith
Grundlagen der Bruchmechanik
Springer-Verlag, Wien, 1982
- [6.2] H.G. Hahn
Bruchmechanik
Teubner-Studienbücher Mechanik
Teubner, Stuttgart, 1976
- [6.3] M. Creager, P.C. Paris
Elastic field equation for blunt cracks with
reference to stress corrosion cracking
Int. J. Fract. Mech. 3, 247-252 (1967)
- [6.4] G.R. Irwin
Lectures Notes to "Introductory Fracture Mechanics"
University of Maryland (1978-80)
- [6.5] H. Neuber
Kerbspannungslehre
Springer-Verlag, Berlin, 1985
- [7.1] W. Czernin
Zementchemie für Bauingenieure
Bauverlag, Wiesbaden, 1975
- [7.2] A. Einstein
Ann. Phys. 19, 289 (1906)
- [7.3] A. Einstein
Ann. Phys. 34, 591 (1911)
- [7.4] M. Reiner
Rheologie
Handbuch der Physik, S. Flügge (ed.)
Springer-Verlag, 1968
- [7.5] F. Wittmann
Bestimmung physikalischer Eigenschaften des Zementsteins
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 232
- [7.6] H. Trost, H. Cordes, G. Abele
Kriech- und Relaxationsversuche an sehr altem Beton
Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 295

- [7.7] E.N. da C. Andrade
Proc. Roy. Soc. *A84* (1911) 1-12
- [7.8] A.H. Cottrell, V. Aytakin
Nature *160* (1947) 328-329
- [7.9] K. Weiss
Vorspannungsrelaxation durch Betonkriechen
Hilti Forschungsbericht 1/84
Hilti AG, Schaan, 1984

Lebenslauf

- 1956 Geboren am 23. September 1956 als Sohn des Klaus Gerber und der Monica Gerber geb. Fetense in Santiago de Chile
- 1962-1974 Besuch der Schweizer Schule zu Santiago (Chile), der Volksschule in Senden/Westfahlen (BRD) (1965-1969) und das Max-Planck-Gymnasium in Kiel (BRD) (1973)
- 1975-1979 Studium der Theoretischen Physik an der Universidad Catolica de Chile in Santiago mit Abschluss als Diplom Physiker
- 1979 Forschungsassistent bei Prof. Dr. M. Lagos
- 1979-1980 Assistent und Fachhörer am Mathematischen Seminar der Eidgenössischen Hochschule in Zürich (ETH)
- ab 1980 Wissenschaftlicher Mitarbeiter des Forschungslabors der Firma Hilti in Schaan, ab 1987 als Projektleiter
- ab 1982 Dozent für Physik an der Liechtensteinischen Ingenieurschule (LIS)

Ich bin deutscher Staatsbürger, verheiratet und Vater von zwei Kindern.

